



TRAVAUX DIRIGES

Dans tous ces exercices, la rédaction devra être particulièrement soignée puisque c'est l'objectif principal du module!!!

TD 1 (4H00) : Quantificateurs, variables, équations

Rappels de cours sur les booléens et les variables :

1) Un booléen (une assertion en math) est une phrase à laquelle on peut mettre une valeur de vérité, il s'exprime avec des variables. Si la variable utilisée, x par exemple, est déclarée **avant** le booléen, alors on dit que ce booléen dépend de x parce que sa valeur de vérité n'est peut-être pas la même pour toutes les affectations de x et on déclare le booléen avec le nom $B(x)$ pour montrer la dépendance.

2) Soit un booléen B universel avec une structure $\forall u \in E, B(u)$.

- Pour prouver que B est vrai **on déclare une variable u de E formelle** et ensuite on argumente pour prouver que le booléen $B(u)$ est vrai.

- La négation de B est $\exists u \in E \mid \neg B(u)$

- Pour prouver que B est faux on prouve que $\neg B$ est vraie ou bien on fait une démonstration par l'absurde.

3) Soit un booléen B existentiel avec une structure $\exists u \in E, B(u)$.

- Pour prouver que B est vrai, une façon de faire est de **déclarer une variable u de E affectée judicieusement** et ensuite on argumente pour prouver que le booléen $B(u)$ est vrai.

- Une autre façon de faire (quand on ne voit pas comment affecter judicieusement) est de déclarer une variable u de E formelle puis de réfléchir à ce que veut dire $B(u)$ vrai jusqu'à avoir l'idée de la façon de déclarer u affectée (analyse/synthèse). Cette réflexion peut amener à reformuler le booléen pour mieux voir sa valeur de vérité et il peut être judicieux dans ce cas d'utiliser le symbole $\iff$ si c'est possible.

- La négation de B est $\forall u \in E, \neg B(u)$

- Pour prouver que B est faux on prouve que $\neg B$ est vraie ou bien on fait une démonstration par l'absurde.

4) Une variable non affectée de E qui possède une particularité n'est pas une variable formelle de E .

5) Certaines variables possèdent des expansions, par exemple $u \in \mathbb{R}^2$ a une expansion en (x, y) , ce n'est pas une particularité.

6) Certaines variables sont muettes pour certains objets mathématiques.

Exercices obligatoires

Exercice 1 :

a) Déclarer une variable numérique de $\mathbb{R}^3$. Déclarer une variable formelle de $\mathbb{R}^3$ sans expansion puis avec expansion.

b) Soit $u = (x, y, x + y) \in \mathbb{R}^3$. Expliquer pourquoi la variable u n'est pas une variable formelle de $\mathbb{R}^3$.

c) On appelle $\mathbb{R}_{12}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 12.

(i) Déclarer une variable affectée de cet ensemble.

(ii) Déclarer sans expansion une variable formelle de cet ensemble.

(iii) Déclarer avec expansion une variable formelle de cet ensemble.

(iv) On s'intéresse aux variables de $\mathbb{R}_{12}[X]$ qui s'annulent en 0.

- Comment s'écrit cette particularité si j'observe une variable formelle sans expansion ?

- Même question en observant une variable formelle avec expansion.

d) Déclarer une variable formelle de l'ensemble des applications définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

e) Déclarer une variable non affectée de l'ensemble des application définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles qui a la particularité de s'annuler en 12.

Exercice 2 :

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on définit le booléen $B(x, y) : x + 3y^2 \geq 0$.

a) Quelle est la valeur de vérité de $B(-4, 1)$? Soit $y \in \mathbb{R}$. Quelle est la valeur de $B(0, y)$? Soit $x \in \mathbb{R}$. Quelle est la valeur de $B(x, 0)$? Écrire $\neg B(x, y)$.

b) Soit le booléen $B_1 : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, B(x, y)$. Écrire la négation de B_1 . Quelle est la valeur de vérité de B_1 ?

c) Soit le booléen $B_2 : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, B(x, y)$. Quelle est la valeur de vérité de B_2 ?

d) Soit le booléen $B_3 : \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, B(x, y)$. Montrer que B_3 est faux en prouvant que sa négation est vraie.

e) Soit le booléen $B_4 : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid B(x, y)$. Montrer que B_4 est vrai. Quand on compare les booléens B_3 et B_4 que vient-on d'illustrer ?

Exercice 3 :

a) Soit le booléen $B : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid y^2 = e^x - 1$.

(i) Déclarer comme dans le cours les booléens $B(x)$ et $B(x, y)$ naturellement associés à B .

(ii) Écrire la négation de $B(x, y)$ puis celle $B(x)$ et enfin écrire la négation de B .

(iii) Montrer que le booléen B est faux en prouvant que sa négation est vraie.

b) Soit le booléen $H : \exists x \in \mathbb{R}^* \mid \forall y \in \mathbb{R}, xy = 12$.

(i) Montrer que H est faux en prouvant que sa négation est vraie.

(ii) Refaire la démonstration de H faux avec une démonstration par l'absurde.

Exercice 4 :

Écrire en langage math les booléens ci-dessous ainsi que leur négation. Sans démonstration, donner si possible la valeur de vérité.

(1) Le carré de tout réel est positif ou nul.

(2) Il existe des réels qui sont strictement supérieurs à leur carré.

(3) Aucun entier relatif n'est supérieur à tous les autres.

(4) Les réels ne sont pas tous des quotients d'entiers naturels.

(5) Aucun réel n'est un quotient d'entiers relatifs.

(6) Il existe un réel dont la somme avec n'importe quel autre est strictement positive.

(7) Pour chaque réel, on peut trouver un réel tel que la somme soit strictement positive.

(8) $\sqrt{3}$ est rationnel.

(9) u est de la forme $-12 + 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

(10) u est de la forme $(3x - 8, 12 - x)$ avec x réel.

(11) $u \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

(12) La fonction f est majorée par 12 sur $[-3; 8]$

(13) La fonction g est minorée par -5 sur $[0; +\infty[$.

(14) la fonction h est bornée entre -5 et 7 sur $\mathbb{R}$.

Rappels de cours au sujet des équations ou inéquations :

1) Une équation (ou inéquation) est un booléen. Résoudre l'équation c'est trouver toutes les affectations de l'inconnue (ou des inconnues) pour lesquelles le booléen a la valeur vraie. On utilise souvent une rédaction par équivalences successives pour résoudre.

2) Il faut toujours commencer par déterminer $D_{(E)}$.

3) Parfois on est amené à faire des découpages de $D_{(E)}$ en intervalle I_k qui conduisent à $Sol_{(E)} \cap I_k$. Il ne faut pas confondre ce découpage avec la discussion selon un paramètre.

4) Il ne faut pas oublier à la fin de tenir compte de $D_{(E)}$ pour écrire l'ensemble des solutions.

Exercice 5 :

a) Soit a et b eux réels.

(i) Donner une condition usuelle sur a et b qui permet d'écrire : $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$.

(ii) Donner une condition usuelle sur a et b qui permet d'écrire $a \leq b \iff a^2 \geq b^2$.

b) Soit (E) l'équation $\sqrt{x+3} \leq x-1$ d'inconnue x réelle. Résoudre (E) .

Exercice 6 :

Soit $m \in \mathbb{R}$. Soit (E_m) l'équation $x^2 - mx + \frac{1}{4} = 0$ d'inconnue x réelle.

q Résoudre l'équation (E_m) .

Exercice 7 :

Soit $m \in \mathbb{R}$. Soit (E_m) l'équation $(m-4)x^2 - 2(m-2)x + m-1 = 0$ d'inconnue x réelle. Résoudre (E_m) .

Exercices complémentaires

Exercice 8 :

a) Soit le booléen $P : \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \mid \ln(x+3) = y$. Montrer que P est vrai.

b) Soit le booléen $A : \exists(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1; -2\}, \frac{5x+1}{x^2+x-2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$. Montrer que A est vrai.

Exercice 9 :

a) Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre l'inéquation $(E_m) : x^2 - 2mx - 2 \geq -3$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

b) Soit $m \in \mathbb{R}$ et l'inéquation $(E_m) : \sqrt{x+3} \leq m-1$ d'inconnue x réelle. Résoudre (E_m)

Exercice 10 :

Notons E l'ensemble des étudiants, S l'ensemble des jours de la semaine et pour un étudiant x on note $h_j(x)$ son heure de réveil le jour j .

a) Écrire avec des symboles mathématiques la proposition :

« Tout étudiant se réveille au moins un jour de la semaine avant 8 h »

b) Écrire la négation de cette proposition avec des symboles mathématiques puis en français.

Exercice 11 :

Soit l'assertion P :

$$\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall (y, z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*, z - xy = 0$$

- a) Montrer que P est fausse en prouvant que sa négation est vraie.
- b) Montrer de nouveau que P est fausse avec une démonstration par l'absurde.

Exercice 12 :

Soit E et F deux ensembles non vides. Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est surjective quand l'assertion suivante est vérifiée : " $\forall t \in F, \exists x \in E \mid f(x) = t$ "

- a) Reformuler cette assertion en langage courant en utilisant le vocabulaire "antécédent".
- b) Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$. L'application g est-elle surjective ?
- c) Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty[$ définie par $h(x) = x^2$. l'application h est-elle surjective ?
- d) Soit $\varphi(x) = \frac{x}{x-2}$
 - (i) Déterminer D_φ .
 - (ii) L'application associée par défaut à φ est-elle surjective ?
- e) Soit $f((x, y)) = (x - 2y, 3x, y + 12)$. Quelle est l'application associée par défaut à f ? Est-elle surjective ?

Exercice 13 :

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{n^2 - 1} - n$.

- a) Reformuler le terme général de cette suite grâce à la quantité conjuguée.
- b) Déclarer avec des quantificateurs l'assertion " la suite (u_n) est majorée " puis démontrer que cette assertion est vérifiée. Faire de même pour l'assertion " la suite (u_n) est minorée ".

TD 2 (6H00) : Les sous-ensembles

Rappels de cours sur les sous-ensembles :

1) Un sous-ensemble est déclaré avec des accolades. Il peut être déclaré avec une écriture dite dans ce cours $\{ \text{type} \mid \text{condition} \}$ où une écriture dite paramétrée appelée aussi $\{ \text{forme} ; \text{type} \}$ qui correspond en fait à un $\{ \text{type} \mid \text{condition existentielle} \}$ qu'on n'a pas forcément envie d'écrire.

2) On peut déclarer une variable formelle d'un sous-ensemble E sans expansion, en se contentant de la baptiser "Soit $u \in E$ " mais la plupart du temps, pour faire des démonstrations il sera nécessaire de déclarer la variable en expansion en affichant sa particularité.

3) Les variables d'un sous-ensemble E sont muettes.

Exercices obligatoires

Exercice 14 :

a) Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4\}$.

(i) Justifier que $(3, 2) \notin A$.

(ii) Déclarer en justifiant une variable u affectée de A , est-ce que $2u \in A$?

b) Soit $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + z = 0\}$

(i) Montrer que $(0, 0, 0) \in B$.

(ii) Déclarer une variable formelle u de B en expansion en montrant bien sa particularité. Montrer que $12u \in B$. En déduire qu'un certain booléen universel est vrai.

c) Soit $C = \{(x - y, -x - y, 2x - y) ; x, y \in \mathbb{R}\}$.

(i) Dans quel espace usuel se situe C ? Reformuler C en $\{ \text{type} \mid \text{condition existentielle} \}$.

(ii) Déclarer une variable affectée u de C . Montrer que $2u \in C$.

(iii) Déclarer en expansion une variable formelle u de C . Montrer que $2u \in C$. En déduire qu'un certain booléen universel est vrai.

d) Soit $D = \{(x, 3x - 5) ; x \in \mathbb{R}\}$.

(i) Reformuler D en $\{ \text{type} \mid \text{condition existentielle} \}$.

(ii) Déclarer en justifiant une variable u affectée de D et montrer que $2u \notin D$. En déduire qu'un certain booléen universel est faux.

Exercice 15 :

Soit $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$

a) Montrer que A est non vide.

b) Soit le booléen $P_1 : \forall (u, v) \in A^2, u + v \in A$. Montrer que P_1 est vrai.

c) Soit le booléen $P_2 : \forall (u, \lambda) \in A \times \mathbb{R}, \lambda u \in A$. Montrer que P_2 est vrai.

Exercice 16 :

Soit $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 12\}$

a) Montrer que A est non vide.

b) Soit le booléen $P_1 : \forall (u, v) \in A^2, u + v \in A$. Montrer que P_1 est faux.

c) Soit le booléen $P_2 : \forall (u, \lambda) \in A \times \mathbb{R}, \lambda u \in A$. Montrer que P_2 est faux.

Exercice 17 :

Soit $A = \{(x - y, 2x - y, x - 2y) ; x, y \in \mathbb{R}\}$.

- Reformuler A en $\{\text{type} \mid \text{condition existentielle}\}$. Montrer que A est non vide.
- Soit le booléen $P_1 : \forall(u, v) \in A^2, u + v \in A$. Montrer que P_1 est vrai.
- Soit le booléen $P_2 : \forall(u, \lambda) \in A \times \mathbb{R}, \lambda u \in A$. Montrer que P_2 est vrai.

Exercice 18 :

Soit $A = \{(x - y - 12, 2x - y, x - 2y) ; x, y \in \mathbb{R}\}$.

- Reformuler A en $\{\text{type} \mid \text{condition existentielle}\}$. Montrer que A est non vide.
- Soit le booléen $P_1 : \forall(u, v) \in A^2, u + v \in A$. Montrer que P_1 est faux.
- Soit le booléen $P_2 : \forall(u, \lambda) \in A \times \mathbb{R}, \lambda u \in A$. Montrer que P_2 est faux.

Rappels de cours sur les sous-ensembles usuels :

1) Sous-ensembles usuels de $\mathbb{R}$: les images de fonction (à ne pas confondre avec la courbe de la fonction qui est une sous-partie de $\mathbb{R}^2$). Ces parties se reformulent souvent plus simplement en intervalle ou union d'intervalles.

2) Sous-ensembles usuels de $\mathbb{R}^3$: les droites et les plans.

3) Sous-ensembles usuels de $\mathbb{R}^2$: les droites, les cercles, les disques (ouverts ou fermés), l'extérieur d'un cercle, la courbe d'une fonction, une partie délimitée par une ou deux courbes de fonctions.

Exercice 19 :

Déclarer les ensembles suivants en langage ensembliste $\{\dots\}$

- La droite de l'espace dirigée par $\vec{u} = (-2, 4, 3)$ et passant par $A(1, 2, 0)$ (forme/type)
- La droite du plan dirigée par $\vec{u} = (-2, 1)$ et passant par l'origine (forme/type)
- La droite du plan d'équation $2x - 5y = 0$ (type/condition et forme/type)
- Le plan de l'espace dirigé par $\vec{u} = (2, 3, -5)$ et $\vec{v} = (-3, 0, 5)$ et passant par $A(0, 0, 7)$ (forme/type)
- Le plan de l'espace d'équation $x - y + 12z = 3$ (type/condition et forme/type)
- La droite de l'espace intersection des plans d'équation $x - y + 12z = 3$ et $x - y = 3$ (type/condition et forme/type)
- Le disque ouvert de centre $(-2, 3)$ et de rayon 2 (type/condition)
- Le plan privé du cercle trigonométrique (type/condition)
- L'image de l'intervalle $[-1, 12]$ par la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ (forme/type)
- La courbe sur $[-1; 12]$ de la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$. (type/condition et forme/type)
- La courbe de la fonction $f(x) = \ln x - 8$.
- L'ensemble des réels congrus à $\frac{\pi}{3}$ modulo 2π .
- L'ensemble des réels de la forme $3k - 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- L'ensemble des couples de réels de la forme $(x + 12, x - 12)$.

Exercice 20 :

Les ensembles ci-dessous correspondent à des parties usuelles de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, identifiez-les précisément avec une phrase ou un dessin.

- $A = \{(x + 3, x - 5) ; x \in \mathbb{R}\}$

- b) $B = \{x^2 + 3 ; x \in [-3; 2]\}$
- c) $C = \{(x - y + 2, 3x - 6, y + 5) ; x, y \in \mathbb{R}\}$
- d) $D = \{(x - y + 2, -2x - 6 + 2y, -4y + 4x - 5) ; x, y \in \mathbb{R}\}$
- e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \leq x \leq 2 \text{ et } y = x^2 + 3\}$;
- f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3 \text{ et } y \leq x^2\}$
- g) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 2)^2 \leq 3\}$;
- h) $H_1 = \{(a, 12a) ; a \in \mathbb{R}\}$; $H_2 = \{(a, 12a)\}$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé au préalable.
- i) $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 2 \text{ et } x^2 \leq y \leq -x^2 + x\}$
- j) $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, \pi] \text{ et } y - \sin x \geq 0\}$
- k) $K = \{e^x + 3 ; x \in \mathbb{R}\}$
- l) $L = \{(x, e^x + 3) ; x \in \mathbb{R}\}$

Rappels de cours sur les inclusions ensemblistes :

1) L'inclusion $A \subset B$ entre deux ensembles est le booléen universel : $\forall u \in A, u \in B$. Ainsi une façon de prouver $A \subset B$ consiste à déclarer une variable formelle u de A de façon détaillée et de prouver que $u \in B$.

2) Prouver $A \not\subset B$, c'est prouver que $\exists u \in A, u \notin B$; une façon de faire consiste à déclarer en justifiant une variable u affectée de A qui n'est pas dans B .

3) Pour prouver une égalité ensembliste non évidente, une façon de faire est de prouver une double inclusion : $A \subset B$ puis $B \subset A$.

4) Attention, les variables ensemblistes sont muettes pour leur ensemble, si vous voyez les mêmes lettres utilisées pour A et B il peut être prudent de prendre l'initiative de les changer et il ne faut pas les utiliser dans une démonstration sans les déclarer.

Exercice 21 :

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 = x - y\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y - z = 0\}$

- a) Reformuler E et F en $\{\text{forme ; type}\}$ et les décrire géométriquement.
- b) Prouver que $F \not\subset E$ de deux façons différentes, l'une des deux façons étant géométrique.
- c) Montrer que $E \subset F$ avec une preuve ensembliste (pas géométrique).

Exercice 22 :

Soit $E = \{(a + b, a, a - b) ; a, b \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a - 2b + c = 0\}$. Montrer que $E = F$ par double inclusion.

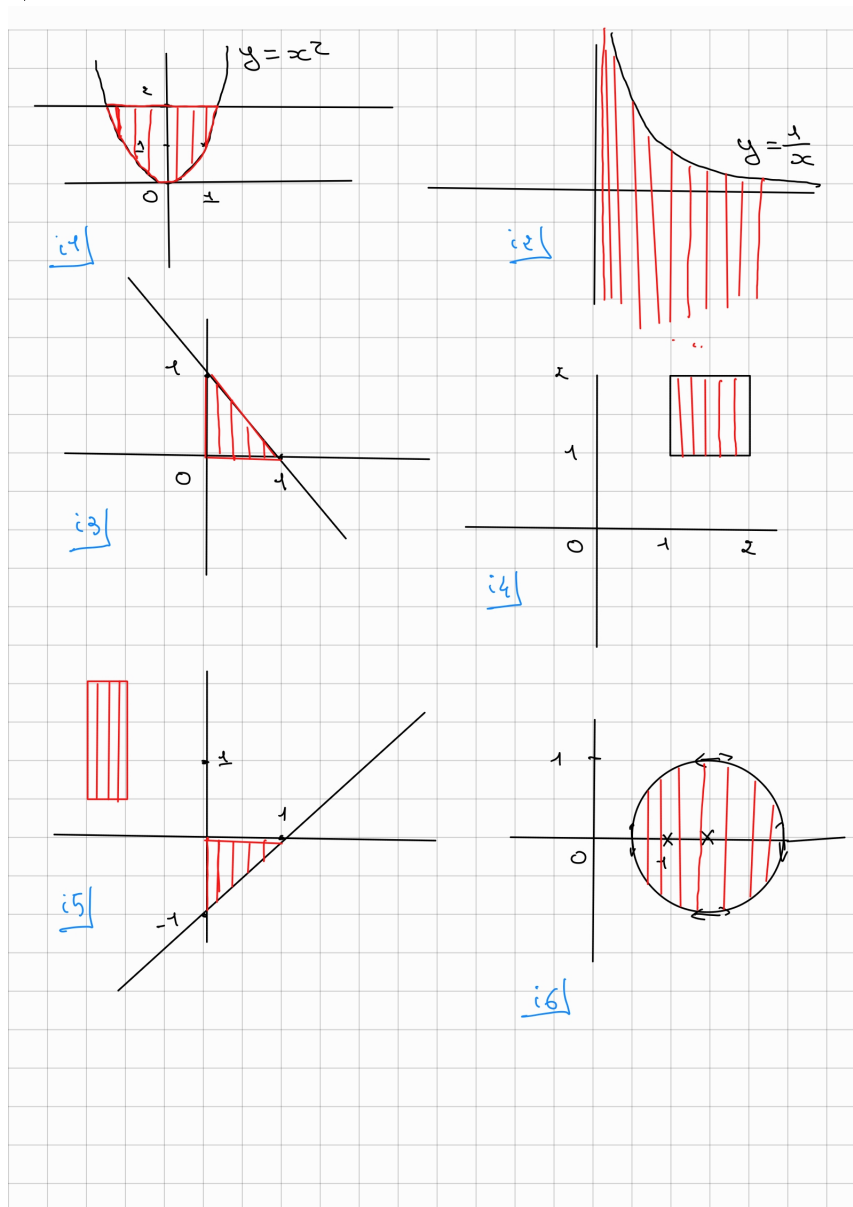
Exercices complémentaires

Exercice 23 :

Déclarer les ensembles suivants :

- a) L'extérieur du cercle de centre $A(-1, 0)$ et de rayon 3.
- b) La partie du plan située au dessus de la parabole $y = -x^2 + x + 12$.
- c) Un rectangle fermé de votre choix que vous aurez d'abord dessiné.
- d) Un disque ouvert de votre choix que vous aurez d'abord dessiné

e) Les parties hachurées suivantes :



Exercice 24 :

Les ensembles ci-dessous correspondent à des parties usuelles de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, identifiez-les précisément avec une phrase ou un dessin.

- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$
- $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\}$
- $C = \{(7, a - 8) ; a \in \mathbb{R}\}$
- $D = \left\{ \frac{1}{x+3} ; x \in [2; 4] \right\}$
- $E = \{(3x, -x, 12x) ; x \in \mathbb{R}\}$
- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0\}$
- $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 \leq 0\}$
- $H = \{(3x + 6y; 2x + 4y, x + 2y); x, y \in \mathbb{R}\}$
- $I = \{|x| ; x \in \mathbb{R}\}$
- $J = \{(x + 2y - 5; 2x + 4y + 12, 3x + 6y); x, y \in \mathbb{R}\}$
- $K = \{(x, 3x - 5, 12x + 2) ; x \in \mathbb{R}\}$

Exercice 25 :

Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq x^2\}$

Soit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$

- Dessiner A et B . Quelle inclusion observe-t-on ? Quelle inclusion n'est pas vérifiée ?
- Montrer par une preuve ensembliste l'inclusion observée.
- Justifier que l'autre inclusion n'est pas vérifiée par un argument non géométrique.

Exercice 26 :

Soit $E = \{a(-1, 2, 3) + b(2, -1, 4) ; a, b \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{a(1, 1, 7) + b(-3, 3, -1) ; a, b \in \mathbb{R}\}$.
Montrer par double inclusion que $E = F$.

Exercice 27 :

a) Soit $A = \{\ln x + 12 ; x \in]0; e]\}$

L'ensemble A est-il majoré ? L'ensemble A est-il minoré ?

b) Soit $B = \left\{ \frac{1}{x+4} ; x \in [0; 8[\right\}$

L'ensemble B est-il majoré ? L'ensemble B est-il minoré ?

c) Soit $C = \left\{ \frac{3}{n} + 8 ; n \in \mathbb{N}^* \right\}$

L'ensemble C est-il majoré ? L'ensemble C est-il minoré ?

d) Soit $D = \{(x, 2x - 3) ; x \in \mathbb{R}\}$

L'ensemble D est-il majoré ? L'ensemble D est-il minoré ?

Exercice pour travailler la méthode d'analyse/synthèse

Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4\}$. Montrer que :

$$\exists u \in A \mid 2u \in A$$

Exercice sur les ensembles d'applications

Soit $E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f(12) = 0\}$.

a) Soit $\tilde{0}$ la fonction nulle. Justifier $\tilde{0} \in E$.

b) Soit le booléen $P_1 : \forall f, g \in E, f + g \in E$. Montrer que P_1 est vrai.

c) Soit le booléen $P_2 : \forall (f, \lambda) \in E \times \mathbb{R}, \lambda f \in E$. Montrer que P_2 est vrai.

d) A-t-on $E = \mathcal{F}(\mathbb{R})$?

Td 3 (4H00) : Connecteurs logiques, opérations sur les ensembles

Exercices obligatoires

Exercice 28 :

Soit le booléen P : Réussir son examen $\Rightarrow$ Avoir travaillé régulièrement

- Reformuler P en langage courant avec le vocabulaire "implique".
- Reformuler P en langage courant avec le vocabulaire "il suffit".
- Reformuler P en langage courant avec le vocabulaire "il faut".
- Reformuler P en langage courant avec le vocabulaire "ou".
- Formuler la contraposée de P avec le symbole $\Rightarrow$.
- Écrire la négation de P .
- Écrire la contraposée de la réciproque de P .
- Écrire la réciproque de P .
- Parmi les phrases suivantes, indiquer celles qui ont le même sens logique que P en justifiant rapidement.

- Tu auras ton examen si tu travailles régulièrement.
- On ne peut avoir son examen qu'en travaillant régulièrement
- Si tu ne travailles pas régulièrement, tu n'auras pas ton examen.
- Il est nécessaire de travailler régulièrement pour avoir son examen.
- Pour avoir son examen, il suffit de travailler régulièrement.
- Ne pas travailler régulièrement entraîne un échec à l'examen.
- Si tu n'as pas ton examen, c'est que tu n'as pas travaillé régulièrement.

Exercice 29 :

- Énoncer le théorème de Pythagore ainsi que sa réciproque.
- Soit ABC un triangle. Un élève calcule que $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$ et affirme que ABC n'est pas rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore. Son argumentation est-elle correcte ?

Exercice 30 :

Montrer que les assertions suivantes sont fausses en prouvant que leur négation est vraie.

- $\forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ impair} \Rightarrow n \text{ multiple de } 3)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$
- $\forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ nombre premier} \Rightarrow n \text{ impair})$.

Exercice 31 :

1) Démontrer les implications suivantes par contraposée :

- $\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ premier} \Rightarrow n = 2 \text{ ou } n \text{ est impair}$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$
- $\forall a \in \mathbb{R}, (\forall \varepsilon > 0, a \leq \varepsilon) \Rightarrow (a \leq 0)$

2) Écrire les négations de toutes ces implications.

Exercice 32 :

Soient A, B, C trois sous-ensembles de E non vides.

Montrer par double implication que :

$$A \cup B = B \cap C \iff A \subset B \subset C$$

Exercice 33 :

Écrire en notation ensembliste les complémentaires des ensembles suivants :

- a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y = 0\}$
- b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4 \text{ et } y = x^2\}$
- c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y = 0 = y + z\}$
- d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4 \text{ et } y \leq |x|\}$
- e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 2)^2 \leq 3\}$
- f) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists a \in \mathbb{R}, x = 2a, y = -a, z = 12 + a\}$
- g) $G = \{(3x - y, y, 2x - 5y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
- h) $H = \{12 + 3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 34 :

Soit $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$

Soit $B = \{(-x + 3y, x - z, y + z, 2y - z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Donner l'écriture par défaut de $A \cap B$ en faisant apparaître une condition existentielle puis déterminer plus simplement $A \cap B$.

Exercice 35 :

Soit $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$

Soit $B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - y - 2z + t = 4\}$

Donner l'écriture par défaut de $A \cap B$ puis déterminer plus simplement $A \cap B$.

Exercice 36 :

Soit $A = \{(3t + 1, t + 2, -2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Soit $B = \{(2t + 1, -t + 2, 4t + 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Identifier géométriquement les ensembles A et B . Donner l'écriture par défaut de $A \cap B$ en faisant apparaître des conditions existentielles puis déterminer $A \cap B$.

Exercices complémentaires

Exercice 37 :

a) On dit qu'une application f de E dans F est injective quand le booléen suivant est vrai :

$$\forall (x, y) \in E^2, (f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y)$$

Donner la valeur de vérité de la réciproque de ce booléen.

b) Soit $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}$.

(i) Justifier que cette fonction induit naturellement une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qu'on nommera elle aussi f .

(ii) Calculer $f(-1)$, $f(1)$, $f(-3)$, $f(3)$.

(iii) L'application f est-elle injective ?

c) Soit $f(x) = e^x + 12$

(i) Justifier que la fonction f induit naturellement une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qu'on nommera elle aussi f .

(ii) Montrer que f est injective.

Exercice 38 :

Écrire en notation ensembliste les complémentaires des ensembles suivants :

a) $A = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\}$

c) $C = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = -1\}$

d) Déterminer $A \cap B$

Exercice 39 :

Soit $A = \{(19 + 3t, -4 - t, 10 + 2t) ; t \in \mathbb{R}\}$

Soit $B = \{(1 + 2t, 3 - t, -1 + t) ; t \in \mathbb{R}\}$

a) Identifier géométriquement les ensembles A et B .

b) Déterminer $A \cap B$

Exercice 40 :

Soit $A = \{(x - y, 2x - y, y - x) ; x, y \in \mathbb{R}\}$.

Soit $B = \{x - 3, 2 + 3x, -1 + x\} ; x \in \mathbb{R}\}$

a) Identifier géométriquement les ensembles A et B .

b) Donner une équation de A

c) Déterminer $A \cap B$.

Exercice 41 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.

a) Soit l'assertion " $P : \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Rightarrow (u_n \leq 20)$ " .

(i) Cette assertion traduit-elle l'idée que (u_n) est majorée par 20 ? Écrire la négation de P .

(ii) Écrire la réciproque de P . Formuler en langage courant l'idée portée par cette réciproque.

b) Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes :

- (i) (u_n) est majorée par 12.
- (ii) (u_n) n'est pas majorée par 12.
- (iii) (u_n) est majorée par 12 à partir d'un certain rang.
- (iv) (u_n) est minorée par -3 à partir d'un certain rang.
- (v) (u_n) est bornée entre -12 et 12
- (vi) (u_n) est bornée entre -5 et 5 à partir d'un certain rang.

Exercice 42 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles. Soit $l \in \mathbb{R}$. L'assertion " (u_n) converge vers l " peut se formuler avec des quantificateurs de la façon suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Rightarrow (l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon)$$

On suppose que (u_n) converge vers 3

- a) Écrire avec des quantificateurs cette assertion
- b) En déduire que (u_n) est majorée par $\frac{31}{10}$ à partir d'un certain rang.
- c) Montrer que (u_n) est minorée par $\frac{299}{100}$ à partir d'un certain rang.
- d) En déduire qu'il existe un rang à partir duquel (u_n) est bornée entre $\frac{299}{100}$ et $\frac{31}{10}$

Exercice 43 :

a) Un étudiant énonce la propriété suivante sur sa copie : " Si un polynôme P de degré deux a son discriminant strictement négatif, alors P n'admet pas de racine réelle".

Puis il explique qu'on a montré préalablement que le polynôme H n'a pas de racine réelle et qu'il est de degré 2 et donc son discriminant est strictement négatif.

- (i) Qu'est ce qui ne va pas dans cette rédaction ? (ii) Corriger l'argumentation.

Exercice 44 :

Soient A, B, C trois sous-ensembles de E non vides. Montrer que :

$$(A \cup C \subset A \cup B) \text{ et } (A \cap C \subset A \cap B) \Rightarrow C \subset B$$

Exercice 45 :

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2} - 1$

- a) Écrire avec des quantificateurs l'assertion A : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée entre -2 et 1.
- b) Montrer par récurrence que l'assertion A est vérifiée.

TD 4 (4H00) Sommes finies, symboles $\sum$

Exercices obligatoires

Exercice 46 : Questions de cours

Répondre sans justifier aux questions suivantes :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$.

- 1) Est-il vrai que $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$?
- 2) Est-il vrai que $\sum_{k=1}^n (a_k b_k) = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)$?
- 3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé. Est-il vrai que $\sum_{k=1}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^n a_k$?
- 4) Est-il vrai que $\sum_{k=1}^n (\lambda + a_k) = \lambda + \sum_{k=1}^n a_k$?
- 5) Est-il vrai que $\sum_{k=1}^n k a_k = k \sum_{k=1}^n a_k$?
- 6) Est-il vrai que $\sum_{k=1}^n n = n$?

Rappels de cours sur les sommes finies :

1) Une somme est arithmétique quand le terme général u_k est de la forme $a + kr$ avec a et r des constantes et k l'indice de la somme. la somme est alors égale au nombre de termes multiplié par la moyenne du premier terme et du dernier.

2) Une somme est géométrique quand le terme général u_k est de la forme λq^k où λ et q sont des constantes et k l'indice de la somme. Si la raison q est différente de 1, la somme est égale au premier terme, multiplié par le quotient entre $(1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}})$ et $(1 - \text{raison})$. Si la raison vaut 1, c'est une somme de constante et elle est donc égale au nombre de termes multiplié par la constante.

3) Une somme télescopique se reformule facilement en l'écrivant en expansion.

4) Une somme binomiale se reconnaît facilement grâce aux coefficients binomiaux. Pour bien identifier, on repère la valeur de n dans le coefficient binomial et non pas à l'extrémité du symbole $\sum$.

Exercice 47 :

- a) Calculer $S_1 = \sum_{k=2}^{30} (3 - 2k)$.
- b) Calculer $S_2 = \frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} + \dots + \frac{19}{3} + 7$.
- c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme S_3 des n premiers nombres impairs.
- d) Calculer $S_4 = \sum_{k=5}^{52} 5 \times 3^k$

e) Calculer $S_5 = 18 + 54 + 162 + \dots 39366$ sachant que $39366 = 18 \times 2187$ et que le log en base 3 de 2187 est 7.

Exercice 48 :

- a) Soit $S_7 = \sum_{k=5}^{108} (-1)^{k+1} 2^{k+1}$;
 (i) Calculer S_7 en observant que $(-1)^{k+1} 2^{k+1} = (-2)(-2)^k$
 (ii) Pouvait-on calculer S_7 avec le changement d'indice $k' = k + 1$? Si oui faites-le.
 b) Soit $n \geq 2$ et $S_8 = \sum_{k=2}^n 5^{2k-1}$.
 (i) Peut-on calculer S_8 avec le changement d'indice $k' = 2k - 1$? Si oui faites-le.
 (ii) Calculer S_8 en observant une reformulation de 5^{2k-1} .
 c) Soit $n \geq 2$ et $S_9 = \frac{5^k}{3^{k-2}}$. Calculer S_9 .
 d) Calculer $S_{10} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} 3^k (-2)^{12-k}$.
 e) Calculer $S_{11} = \sum_{k=0}^{11} \binom{12}{k} 3^k$; f) Calculer $S_{12} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k 2^{n-k}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 49 :

- a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
 b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déduire de la question précédente une reformulation sans symbole $\sum$ de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 50 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n k^2$ et $T_n = \sum_{k=1}^n (k+1)^3 - k^3$

- a) Calculer T_n sans symbole $\sum$.
 b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, développer $(k+1)^3 - k^3$ et en déduire une nouvelle formulation de T_n en fonction de S_n .
 c) Déduire des questions précédentes une reformulation de S_n sans symbole $\sum$ sous une forme factorisée qui fait intervenir trois polynômes de degré 1.

Exercice 51 : Disjonction pair/impair

- a) Calculer $\sum_{k=0}^{128} u_k$ avec $u_k = 3k - 2$ si k est pair et $u_k = 2^k$ si k est impair.
 b) Calculer $\sum_{k=0}^{132} u_k$ avec $u_k = 0$ si k est pair et $u_k = (-1)^p 2^p$ si $k = 2p + 1$ est impair.
 c) Calculer $\sum_{k=0}^{151} u_k$ avec $u_k = 12$ si k est pair et $u_k = (-1)^p 3^{p-1}$ si $k = 2p - 1$ est impair.

- d) Calculer $\sum_{k=0}^{51} u_k$ avec $u_k = (1 + (-1)^k)7^{k+2}$ par disjonction pair/impair.

Exercice 52 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!}$

- a) Reformuler S_n avec un changement d'indice, de façon à simplifier le dénominateur.
 b) Reformuler la somme obtenue en scindant la fraction et en déduire une formulation de S_n sans symbole $\sum$

Exercices complémentaires

Exercice 53 :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- a) Calculer $u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et $w_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$.
 b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Que peut-on dire de $(-1)^k + 1$? Formuler $u_{2n} + w_{2n}$ sous une forme simplifiée qui utilisera cette remarque.
 c) En déduire la valeur de $s_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k}$

Exercice 54 :

On rappelle que pour un réel $x \geq 0$ il existe un unique réel positif y qui vérifie $y^4 = x$ et qu'on le note $\sqrt[4]{x}$ ou encore $x^{1/4}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $u_n = \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt[4]{n+1} + \sqrt[4]{n})}$.

- a) Utiliser la quantité conjuguée de $\sqrt[4]{n+1} + \sqrt[4]{n}$ pour reformuler u_n
 b) En déduire que $\sum_{k=1}^{9999} u_k = 9$.

Exercice 55 :

- a) Résoudre l'équation $e^{2it} = 1$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}$.
 b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$.

(i) Calculer $\sum_{k=0}^n e^{2ikt}$.

(ii) En déduire $\sum_{k=0}^n \cos(2kt)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(2kt)$

Exercice 56 :

- a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Développer $(e^{it} + e^{-it})^4$ avec le triangle de Pascal. En déduire la linéarisation de $\cos^4(t)$.
 b) Linéariser $\sin^5 t$.

Exercice 57 :

On veut définir une suite (u_n) par récurrence en posant :

$$u_0 = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ln(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_n)$$

a) Montrer que la suite ainsi posée est bien définie, c'est à dire montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ défini et } u_n > 0$$

b) La suite (u_n) est-elle monotone ? convergente ? Si oui quelle est sa limite ?

c) Exprimer $\sum_{k=0}^n u_k$ sans symbole Σ .

d) Exprimer $\sum_{k=1}^n \ln(u_k)$ sans symbole Σ , en déduire $u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$ en fonction de n .

Exercice 58 :

Calculer les sommes suivantes :

$$\text{a) } \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \quad \text{b) } \sum_{k=1}^n (-1)^k k \binom{n}{k}$$

Indication : on pourra commencer par reformuler $k \binom{n}{k}$

Exercice 59 :

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k entier tel que $0 < k < n$. Montrer que (Formule de triangle de Pascal) :

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Rappel : $(n+1)! = (n+1) \times n!$ (reformulation usuelle)

b) Montrer par récurrence la formule du binôme.

Exercice 60 :

a) Calculer la somme S_5 des entiers multiples de 7 plus grands que 100 et plus petits que 1000

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$

c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n 7 \frac{3^{k-1}}{5^k}$

Exercice 61 :

Soient $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer $\sum_{k=0}^n q^{2k}$; b) Pour $n \geq 4$, calculer $\sum_{k=3}^{n-1} 12q^{k+1}$.

c) Pour $n \geq 4$, calculer $\sum_{k=3}^{n-1} q^{n+1}$.