Langage, logique et outils scientifiques
Deuxième partie

2023/2024

Chapitre 1

Calcul de limites et équivalents

Dans tout ce cours, f désigne une fonction ou une application de la variable réelle à valeur réelle. $\bar{\mathbb{R}}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ auquel on ajoute $+\infty$ et $-\infty$ comme si c'étaient des nombres, ainsi écrire $a \in \bar{\mathbb{R}}$ ça veut dire qu'on peut avoir a réel ou infini.

1. Fonctions définies au voisinage d'un point

Définition 1.1.
(i) Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est définie au voisinage de a s'il existe un intervalle I d'intérieur non vide, contenant a tel que f soit définie sur I sauf éventuellement en a, autrement dit $I \subset D_f$ ou éventuellement $I \backslash \{a\} \subset D_f$.

(ii) On dit que f est définie au voisinage de $+\infty$ s'il existe un réel A tel que $[A, +\infty[\subset D_f$.

(iii) On dit que f est définie au voisinage de $-\infty$ s'il existe un réel B tel que $]-\infty, B] \subset D_f$.

Par exemple la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est définie au voisinage de 0 car je peux poser $I = [0; 1]$ qui est d'intérieur non vide, qui contient 0 et f est définie sur I.

Remarque : On connait déjà la définition d'un voisinage de a. Si $a \in \mathbb{R}$ c'est un petit intervalle ouvert qui contient a c'est à dire un intervalle de la forme $]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$ qu'on n'a pas forcément envie de déclarer. On le note $V(a)$. Si $a = +\infty$ alors un voisinage de a c'est un intervalle $[A, +\infty[$ enfin si $a = -\infty$ c'est un intervalle $]-\infty, B]$. Ainsi, pour une fonction f, être définie au voisinage de a est moins contraignant quand $a \in \mathbb{R}$ qu'être définie sur un voisinage de a. Par exemple notre fonction racine carrée de x est définie au voisinage de 0 sans être définie sur $V(0)$. Par contre être définie au voisinage de $+\infty$ c'est comme être définie sur $V(+\infty)$.

Exercice 1 :

a) Soit $g(x) = \ln x$.
(i) g est-elle définie au voisinage de -1 ?
(ii) g est-elle définie au voisinage de 0 ? est-elle définie sur $V(0)$?
b) Soit $f(x) = \dfrac{1}{x - 12}$.
(i) Cette fonction est-elle définie au voisinage de 14 ?
(ii) Est-elle définie au voisinage de 12 ?
(iii) Est-elle définie au voisinage de $+\infty$?

c) Soit $h(x)$ définie par $h(x) = x^{1/4}$ si $x \geq 0$ et $h(-1) = 12$.
h est-elle définie au voisinage de -1 ?

Exercice 2 :

a) Donner l'exemple d'une fonction définie au voisinage de 1 mais pas en 1.
b) Donner l'exemple d'une fonction définie au voisinage de 1 et aussi en 1.
c) Donner l'exemple d'une fonction qui n'est pas définie au voisinage de 1.

2. Limites de fonctions

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f définie au voisinage de a. Soit $l \in \mathbb{R}$. Dire que la limite de $f(x)$ quand x tend vers a vaut l c'est exprimer **précisément** l'idée que si x " vaut environ " a sans être égal à a alors " $f(x)$ vaut environ l". Combien faut-il déclarer de variables pour exprimer cette idée et comment les déclare-t-on ?

Même si l'idée ci-dessus sert beaucoup dans les exercices pour les opérations de limite, quand il s'agit d'exprimer le concept il vaut mieux retenir l'assertion universelle suivante :

Pour tout voisinage $V(l)$ de la limite, il existe un voisinage $V(a)$ du point tel que pour tout x de $D_f \backslash \{a\}$

$$(x \in V(a)) \Rightarrow (f(x) \in V(l))$$

Ensuite dans la pratique on déclare les variables nécessaires pour déclarer précisément les voisinages en question avec les bons quantificateurs. Par exemple :

- être dans un voisinage de l quand $l \in \mathbb{R}$ c'est être dans un intervalle $]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$ on va donc déclarer ε si on veut parler d'un voisinage de $l \in \mathbb{R}$ et au lieu d'écrire $f(x) \in V(l)$ on écrira $|f(x) - l| < \varepsilon$ qui est équivalent à $f(x) \in]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$

- être dans un voisinage de l quand $l = +\infty$ c'est être dans un intervalle $[A, +\infty[$ on va donc déclarer $A > 0$ si on veut parler d'un voisinage de $+\infty$ et au lieu d'écrire $f(x) \in V(+\infty)$ on écrit $f(x) \geq A$ qui est équivalent à $f(x) \in [A; +\infty[$.

- être dans un voisinage de l quand $l = -\infty$ c'est être dans un intervalle $]-\infty; B]$[on va donc déclarer $B < 0$ si on veut parler d'un voisinage de $-\infty$ et au lieu d'écrire $f(x) \in V(-\infty)$ on écrit $f(x) \leq B$ qui est équivalent à $f(x) \in]-\infty; B]$.

On aboutit donc aux définitions suivantes :

Définition 1.2. *Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie au voisinage de a. Soit $l \in \mathbb{R}$. Alors :*
(i) On dit que la fonction f admet pour limite l en a (ou encore que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a) si et seulement si l'assertion suivante est vraie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in D_f \backslash \{a\}, (|x-a| \leq \eta) \Rightarrow (|f(x) - l| \leq \varepsilon)$$

(ii) On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en a si et seulement si l'assertion suivante est vraie :

(iii) On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en a si et seulement si l'assertion suivante est vraie :

Exercice 3 :

a) Soit f définie au voisinage de $+\infty$.
(i) Écrire en langage quantifié $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$.
(ii) Écrire en langage quantifié $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
b) Soit f définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Écrire que f n'a pas pour limite l en a.

Exercice 4 :

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ et qui admet pour limite 12 en a. Montrer l'assertion suivante :

$$\exists \eta > 0 \ |\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{a\},\ |x-a| < \eta \Rightarrow 11,9 \leq f(x) \leq 12,1$$

Théorème 1.1. *Si f admet une limite en un point, alors elle est unique.*

Exercice 5 :

Faire la preuve du théorème dans le cas d'une limite l finie en $a \in \mathbb{R}$.

3. Les outils usuels pour manipuler ou déterminer une limite

Si la limite existe elle est unique, mais encore faut-il qu'elle existe !Par exemple, la fonction partie entière n'a pas de limite en 0, les fonctions cos et sin n'ont pas de limite en $+\infty$. Quand on écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ldots$, on dit "qu'on passe à la limite" au sens où l'on passe de la formule $f(x)$ à la limite de f en a mais pour avoir le droit de passer à la limite, il faut être sûr qu'elle existe et pouvoir l'argumenter avant.

3.1 Les théorèmes d'opérations de limites usuelles

Si les opérations sur les limites usuelles de fonction ne conduisent pas à des formes indéterminées, alors ces opérations prouvent l'existence de la limite et donnent la valeur. On peut argumenter de la façon suivante : "par théorèmes d'opérations sur les limites usuelles, on trouve $\lim_{x\to a} f(x) = ...$

Les formes indéterminées à connaitre au niveau L1 sont :

$$\frac{"0"}{"0"},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ "0" \times \pm\infty,\ +\infty - \infty,\ "1"^{+\infty}.$$

Il faut également faire attention à la forme $\dfrac{l \neq 0}{"0"}$ qui ainsi affichée est indéterminée alors que l'on sait calculer $\dfrac{l \neq 0}{"0^+"}$ ou $\dfrac{l \neq 0}{"0^-"}$

Quand on a affaire à une forme indéterminée on essaye souvent de reformuler pour lever l'indétermination :

- Factorisation par le terme dominant au numérateur et au dominateur dans le cas de $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

- Réduction de la fraction ou recours aux indéterminées usuelles dans le cas $\frac{"0"}{"0"}$
- Factorisation par le terme dominant dans le cas $+\infty - \infty$
- Expression conjuguée

Rappel des formes indéterminées usuelles :

Croissances comparées en $+\infty$

Pour tout réel $\alpha,\ \beta > 0$:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)^\alpha}{x^\beta} = +\infty}, \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{(e^x)^\alpha} = 0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0}, \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{(\ln(x))^\alpha} = +\infty}$$

Croissances comparées en 0 et en $-\infty$

Pour tout réel $\alpha,\ \beta > 0$

$$\boxed{\lim_{u\to0^+} u^\alpha(\ln(u))^\beta = 0}$$

Pour tout entier n non nul et tout réel $\beta > 0$

$$\boxed{\lim_{u\to-\infty} u^n(e^u)^\beta = 0}$$

Formes indéterminées usuelles $\frac{"0"}{"0"}$

Ce sont presque toutes des limites de taux de variation :

Exercice 6 :

Déterminer les limites suivantes si elles existent :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-\sqrt{x}-12}{x^3+8}$; $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{(x^2-4)(x-5)}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-\sqrt{x}-12}{x^3+8}$; $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-2}{(x^2-4)(x-5)}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x \ln(\sin x)$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{2x-4}$; $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{(2x-4)^4}$; $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3e^x-x^2+12}{4x^5-3\ln x+7}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{5}{4-x^2}$

3.2 Autres théorèmes

Théorème 1.2.
Théorème des gendarmes :
1) S'il est vrai que :
(i) Sur $V(a)\backslash\{a\}\cap D_f$, $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$
(ii) g *et* h *ont la même limite* ***finie*** l *en* a
Alors f *admet une limite en* a *et* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$.

Théorème de minoration :
S'il est vrai que :
(i) Sur $V(a)\backslash\{a\}\cap D_f$, $g(x)\leq f(x)$
(ii) $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$
Alors f *admet une limite en* a *et* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.

Théorème de majoration : :
S'il est vrai que :
(i) Sur $V(a)\backslash\{a\}\cap D_f$, $g(x)\leq f(x)$
(ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$
Alors g *admet une limite en* a *et* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$.

Propriété 1.1.
Le produit d'une fonction bornée au voisinage de $a\in\bar{\mathbb{R}}$ *par une fonction qui tend vers* 0 *en* a *est une fonction qui tend vers 0 en* a.

Exemple :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\sin x = 0$ car ...

Exercice 7 :

Démontrer cette propriété

⚠ Il ne faut pas confondre le théorème des gendarmes, qui permet de prouver l'existence d'une limite, avec un passage à la limite dans une inégalité, où l'existence des limites est pré-requise :

Passage à la limite dans une inégalité large :

Propriété 1.2.
Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \bar{\mathbb{R}}$, a étant éventuellement exclus. S'il est vrai que :
(i) Sur $V(a)\backslash\{a\} \cap D_f$, $f(x) \leq g(x) \quad (\star)$
*(ii) f et g ont des limites **finies** respectives l_f et l_g en a.*
Alors on peut passer à la limite dans l'inégalité $(\star)$ et on obtient $l_f \leq l_g$.

Passage à la limite dans une inégalité stricte :

Propriété 1.3.
Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \bar{\mathbb{R}}$, sauf peut-être en a. S'il est vrai que :
(i) Sur $V(a)\backslash\{a\}$, $f(x) < g(x) \quad (\star)$
*(ii) f et g ont des limites **finies** respectives l_f et l_g en a.*
Alors on peut passer à la limite dans l'inégalité $(\star)$ et on obtient $l_f \leq l_g$.

⚠ Par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent larges.

3.3 Limites des fonctions monotones

Théorème 1.3.
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a; b[$ avec $a; b \in \bar{\mathbb{R}}$.
Si f est monotone sur $]a; b[$ (croissante ou décroissante), alors f possède toujours une limite en a et b, la limite pouvant être finie ou infinie.

Remarques :

R1 : Si f est croissante et majorée sur $]a; b[$, alors f admet une limite finie l en b et l majore f sur $]a, b[$.

R2 : Si f est croissante et minorée sur $]a; b[$, alors f admet une limite finie l en a et cette limite l minore f sur $]a, b[$.

R3 : Si f est décroissante et minorée sur $]a; b[$, alors f admet une limite finie l en b qui minore f sur $]a; b[$.

R4 : Si f est décroissante et majorée sur $]a; b[$, alors f admet une limite finie l en a et cette limite majore f.

R5 : Si f est croissante et non majorée sur $]a; b[$, alors f tend vers $+\infty$ en b.

R6 : Si f est décroissante et non minorée sur $]a; b[$ alors f tend vers $-\infty$ en b.

4. Fonction négligeable devant une autre au voisiange d'un point a

Définition 1.3.
Soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Soit f et g des fonctions définies au voisinage de a .
f est négligeable devant g en a *lorsqu'on peut écrire $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$, où la fonction ε est définie au voisinage de a et tend vers 0 quand x tend vers a. On écrit alors " Au voisinage de a, $f = o(g)$" qu'on lit aussi "f est un petit o de g".*

Remarque : certains préfèrent noter $f \underset{x \to a}{=} o(g)$ au lieu d'écrire "au voisinage de a". Attention à cette notation, on ne fait pas tendre x vers a comme dans une limite, rien à voir, c'est une autre façon de dire que x est au voisinage de a.

Exemples :

Propriété 1.4.
Soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Soit f et g des fonctions définies au voisinage de a .
Si $\dfrac{f}{g}$ est définie au voisinage de a, alors

$$f \underset{x \to a}{=} o(g) \text{ si et seulement si } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

On peut donc revisiter certaines formes indéterminées usuelles :

Propriété 1.5. ***Comparaisons usuelles***

Comparaisons entre puissances :

$$\text{(i) } 0 < \alpha < \beta \quad \Rightarrow \quad x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta)$$
$$\text{(ii) } 0 < \alpha < \beta \quad \Rightarrow \quad x^\beta \underset{x\to 0}{=} o(x^\alpha)$$

Croissances comparées :

$$\text{(iii) } \forall\alpha > 0,\ \forall\beta > 0, \quad (\ln x)^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\alpha)$$
$$\text{(iv) } \forall\alpha > 0,\ \forall\beta > 0, \quad x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\beta x})$$
$$\text{(v) } \lim_{x\to0^+} x^\alpha \ln(x) = 0 \ \ i.e \ \ln x \underset{x\to0^+}{=} =o(\frac{1}{x^\alpha})$$

Propriété 1.6. ***Opérations sur les "o"***

(i) $\forall\lambda \in \mathbb{R}, \lambda o(f) = o(f) = o(\lambda f)$
(ii) $o(f) + o(f) \underset{x\to a}{=} o(f)$.
Plus généralement, une somme finie de $o(f)$ "se réduit" en un $o(f)$, c'est à dire que ça reste une fonction négligeable devant f.
(iii) Si $f \underset{x\to a}{=} o(g)$ *et* $g \underset{x\to a}{=} o(h)$ *alors* $f \underset{x\to a}{=} o(h)$ *autrement dit* $o(o(h)) \underset{x\to a}{=} o(h)$.

Exercice 8 :

a) $o(12x^6) + o(5x^7) + 8 \underset{x\to+\infty}{=}$ b) $o(12x^6) + o(5x^7) + 8 \underset{x\to0}{=}$
c) $o((x-5)^3) \underset{x\to+\infty}{=}$ d) $o((x-5)^3) \underset{x\to0}{=}$

5. Fonctions équivalentes au voisinage de a

5.1 Définition et règles de calcul

Définition 1.4.
Soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Soient deux fonctions f et g définies au voisinage de a. On dit que ***ces fonctions sont équivalentes en*** *a, et on note $f \underset{x\to a}{\sim} g$, lorsqu'on peut écrire au voisinage de a $f(x) = g(x)\alpha(x)$, où la fonction α tend vers 1 lorsque x tend vers a.*

Propriété 1.7.
- Si deux fonctions sont équivalentes en a, et si l'une des deux admet une limite $l \in \bar{\mathbb{R}}$ en a, alors l'autre admet la même limite l en a.
- Si deux fonctions sont équivalentes en a, elles sont de même signe au voisinage de a.

Un physicien résumerait cette propriété en disant que deux fonctions équivalentes en a auront "le même ordre de grandeur" en a.

Propriété 1.8. ***Opérations sur les équivalents***
(i) $f \underset{x\to a}{\sim} g \Longleftrightarrow f \underset{x\to a}{=} g + o(g)$ *d'où l'automatisme pratique :* $g + o(g) \underset{x\to a}{\sim} g$

(ii) ***Produit*** *: si* $f_1 \underset{x\to a}{\sim} g_1$ *et* $f_2 \underset{x\to a}{\sim} g_2$ *alors* $f_1 f_2 \underset{x\to a}{\sim} g_1 g_2$
(iii) ***Quotient*** *: si* $f_1 \underset{x\to a}{\sim} g_1$ *et* $f_2 \underset{x\to a}{\sim} g_2$ *alors* $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$
(iv) ***Puissance*** *: si* $f \underset{x\to a}{\sim} g$ *alors* $f^n \underset{x\to a}{\sim} g^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
Plus généralement, si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ *et* $g > 0$ *au voisinage de a, alors* $f^\alpha \underset{x\to a}{\sim} g^\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
(v) ***Transitivité*** *Si* $f \underset{x\to a}{\sim} g$ *et* $g \underset{x\to a}{\sim} h$ *alors* $f \underset{x\to a}{\sim} h$

⚠ L'équivalence est compatible avec la multiplication, la division, et l'élévation à une puissance fixée. En revanche, elle n'est pas compatible avec l'addition :

$x^2 \underset{x\to 0}{\sim} x^2 + x^3$ car ... et $-x^2 + x^4 \underset{x\to 0}{\sim} -x^2$ car ...

mais il n'est pas vrai que $x^4 \underset{x\to 0}{\sim} x^3$.

⚠ On ne doit jamais écrire qu'une fonction est équivalente à zéro en a, sauf si elle est nulle sur tout un voisinage de a ce qui est exceptionnel. Si en calculant on finit par trouver $f \underset{x\to a}{\sim} 0$ c'est que les calculs sont très probablement faux ...

⚠ On peut utiliser la transitivité pour les équivalents mais on ne doit pas composer sur un équivalent. Par exemple si je sais que $f \underset{x\to a}{\sim} g$ je ne peux pas en déduire $e^f \underset{x\to a}{\sim} e^g$.

5.2 Équivalents usuels

Propriété 1.9.
Soit f et g définies au voisinage de a. Si $\dfrac{f}{g}$ est définie au voisinage de a, alors :

$$f \underset{x\to a}{\sim} g \text{ si et seulement si } \lim_{x\to a} \frac{f}{g} = 1$$

Propriété 1.10.

(i) Si $\lim_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ *non nul, alors* $f \underset{x \to a}{\sim} l$

(ii) $e^u - 1 \underset{u \to 0}{\sim}$

(iii) $\ln(1+u) \underset{u \to 0}{\sim}$

(iv) Pour α *fixé réel.* $(1+u)^\alpha - 1 \underset{u \to 0}{\sim}$

(v) $\ln(v) \underset{v \in V(1)}{\sim} v - 1$

(v) $\sin u \underset{u \to 0}{\sim}$

(vi) $\tan u \underset{u \to 0}{\sim}$

(vii) $\arctan u \underset{u \to 0}{\sim}$

(viii) $1 - \cos u \underset{u \to 0}{\sim}$

(ix) Un polynôme est équivalent en + ou - l'infini à son monôme de plus haut degré.
(x) Un polynôme est équivalent en 0 à son monôme de plus petit degré (éventuellement constant)

Propriété 1.11.

(i) Si $u(x)$ *tend vers 0 en* $a \in \bar{\mathbb{R}}$*, alors* $e^u - 1 \underset{x \to a}{\sim} u$

(ii) Si $u(x)$ *tend vers 0 en* $a \in \bar{\mathbb{R}}$*, alors* $\ln(1+u) \underset{x \to a}{\sim} u$

(iii) Si $u(x)$ *tend vers 0 en* $a \in \bar{\mathbb{R}}$*, alors* $(1+u)^\alpha - 1 \underset{x \to a}{\sim} \alpha u$

(iv) Si $u(x)$ *tend vers 0 en* $a \in \bar{\mathbb{R}}$*, alors* $\sin u \underset{x \to a}{\sim} u$

(v) Si $u(x)$ *tend vers 0 en* $a \in \bar{\mathbb{R}}$*, alors* $\tan u \underset{x \to a}{\sim} u$

(vi) Si $u(x)$ *tend vers 0 en* $a \in \bar{\mathbb{R}}$*, alors* $\arctan u \underset{x \to a}{\sim} u$

(vii) Si $u(x)$ *tend vers 0 en* $a \in \bar{\mathbb{R}}$*, alors* $1 - \cos u \underset{x \to a}{\sim} \frac{1}{2}u^2$

Exercice 9 :

Donner des équivalents des fonctions suivantes au voisinage demandé :
a) $f(x) = x^2 + 3x + 5$ au voisinage de 2.
b) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ au voisinage de 1.
c) $f(x) = 2x^2 + 3\sqrt{x} - \ln x$ au voisinage de $+\infty$.
d) $f(x) = e^x + 3\cos x - 2$ au voisinage de 0.
e) $f(x) = e^x + 3\cos x - 2$ au voisinage de $+\infty$.
f) $f(x) = 3x^{1000} - (\ln x)^{12000}$ au voisinage de $+\infty$.
g) $f(x) = 7x^{12}\ln x - \sqrt{x}$ au voisinage de $+\infty$.
h) $f(x) = e^{3x} - 5x^{12}$ au voisinage de $+\infty$.
i) $f(x) = e^{3x} - 5x^{12}$ au voisinage de 0.
j) $f(x) = \dfrac{x + \ln x}{x + \sin x}$ au voisinage de $+\infty$.
k) $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{\sin x}$ au voisinage de 0.

l) $f(x) = \dfrac{\sin(3x)}{\tan(3x)}$ au voisinage de 0.

m) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$ au voisinage de 4.

Exercice 10 :

Donner des équivalents des fonctions suivantes au voisinage demandé :

a) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ au voisinage de $+\infty$.

b) $f(x) = \ln(x^2+3x+1) - \ln(x^2+x+3)$ au voisinage de 1.

Exercice 11 :

a) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-1}{e^{x^2}-1}$; b) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to e} \frac{\sqrt{\ln x}-1}{e^x-e^e}$;

c) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x}$; d) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{1-\sqrt{x^2+3x+1}}$

e) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 1} (x^2+2x-3)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$; f) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

Exercice 12 :

Déterminer les limites suivantes si elles existent :

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1+\sqrt{x})^{1/x}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^3}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\cos(3x)-1}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3\arctan(e^{-x})$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{(x+1)^3}$ h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^3}$ i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{(x+1)^3}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sin(x)\ln(x)$ k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{1-\cos x}$ l) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/3} \frac{1-2\cos x}{\pi-3x}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$ n) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{3}{x^3-1} - \frac{2}{x^2-1}$ o) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

Exercice 13 :

a) Rappeler la définition de 12^π.

b) Soit $a > 0$. Donner l'ensemble de définition de $f(x) = a^x$, justifier rapidement sa continuité et sa dérivabilité. Calculer la dérivée.

c) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{2^x-32}{x-5}$; d) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$; e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1-x)^{\frac{1}{\sin(\pi x)}}$

f) Donner un équivalent de $f(x) = (1+e^x)^x - (1+e^{-x})^x$ au voisinage de 0.

Chapitre 2

Primitives et intégrales

2.1 Primitives d'une fonction continue

2.1.1 Définition et existence

Définition 2.1. *Soit f une fonction définie* ***sur un intervalle*** *I. Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.*

Théorème 2.1. *Si une fonction est continue* ***sur un intervalle*** *I alors elle admet des primitives sur I (On dit que la continuité est une condition suffisante d'existence de primitive)*

Démonstration.
Preuve admise □

Théorème 2.2. *Soit f une fonction continue* ***sur un intervalle*** *I et F une primitive de f sur I, alors :*

$$G \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I \iff \exists C \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I, G(x) = F(x) + C.$$

Autrement dit, quand une fonction f possède une primitive sur un intervalle I elle en possède en fait une infinité qui sont toutes égales à une constante près sur I.

Lemme bien connu (admis) :
Soit F une fonction dérivable **sur l'intervalle** I et telle que $\forall x \in I,\ F'(x) = 0$, alors F est une fonction constante sur I :

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ F(x) = C$$

.

Démonstration du théorème :

...

Exemple 2.1.

- *L'ensemble des primitives de $x \to x^2$ sur $\mathbb{R}$ est constitué des fonctions F telles que l'on puisse poser $C \in \mathbb{R}$ et avoir F de la forme $x \to \frac{1}{3}x^3 + C$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ce que l'on peut écrire :*

$$Prim(f) = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

- *Donner les primitives sur $\mathbb{R}^*$ de la fonction f définie par $f(x) = \cos x$ si $x > 0$ et $f(x) = x^{12}$ si $x < 0$.*

$\dots$

Notation :

On note $\int f(x)dx$ **un** élément formel de l'ensemble des primitives de la fonction f sur un intervalle I (à préciser). La notation dx sert à déclarer que la variable de la primitive est x, on dit que c'est la variable d'intégration. On écrirait dt si les calculs étaient faits avec la variable d'intégration t.

Dans cette écriture, l'intervalle de la variable d'intégration n'est pas déclaré explicitement (comme souvent avec les fonctions), il est d'usage de le préciser **avant** de débuter le calcul en se plaçant sur un intervalle où la fonction primitivée est continue.

Une conséquence immédiate de cette notation est que sur I, on a $\int f'(x)dx = f(x) + c$ où $c \in \mathbb{R}$ constante sur I. La constante c est présente dans la reformulation parce qu'on écrit un élément formel de l'ensemble des primitives.

Cette notation ne doit pas être confondue avec la notation des intégrales, même s'il y a des points communs entre les deux dans les procédés de calcul, les objets sont foncièrement différents, l'un est une fonction avec une variable d'intégration x qui sera présente dans le résultat final, l'autre est un nombre (un mesure d'aire) qui ne dépend pas de la variable d'intégration.

Exemple 2.2. *Sur $I = \mathbb{R}$, $\int x^{12}dx = \frac{x^{13}}{13} + c$, où $c \in \mathbb{R}$ constante sur I.*

Sur $[0, +\infty[$ on a $\int \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}t\sqrt{t} + c$ où $c \in \mathbb{R}$ constante sur $[0; +\infty[$.

$\int_0^2 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$.

Primitives usuelles : En utilisant $\int f'(x)dx = f(x) + c$ et grâce aux dérivées usuelles, on obtient le tableau suivant :

$\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, $\int \alpha dx$	$\alpha x + c$	$I = \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{Q}^+$ $\int x^n dx$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$	dépend de n
$\int \dfrac{1}{x} dx$	$\ln(\|x\|) + c$	$I =]0, +\infty[$ ou $] - \infty, 0[$
$n \in \mathbb{Q}^+ - \{1\}$ $\int \dfrac{1}{x^n} dx$	$\dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	dépend de n
$\int \cos x dx$	$\sin x + c$	$I = \mathbb{R}$
$\int \sin x dx$	$-\cos x + c$	$I = \mathbb{R}$
$\int e^x dx$	$e^x + c$	$I = \mathbb{R}$

2.1.2 Linéarité

Propriété 2.1.
1) Sur I :

$$\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une constante. Alors sur I :

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$$

3) D'après 1) et 2), soit α et β deux constantes réelles. Alors sur I :

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

Démonstration.

...

□

2.1.3 Intégration " à vue" ou changement de variables dans une primitive

Propriété 2.2. *Si g est dérivable sur un intervalle I, si F est une primitive de f sur $g(I)$, alors $x \mapsto F(g(x))$ est une primitive de $x \mapsto (f(g(x))g'(x)$:*

$$\int (f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c$$

Démonstration.

C'est très facile, il suffit de remarquer que l'expression $(f(g(x))g'(x)$ est la dérivée de $F(g(x))$.

□

Cette propriété appliquée aux cas où f est une fonction usuelle donne les primitives suivantes :

$n \in \mathbb{Q}^+$ $\int u'(x)u^n(x)dx$	$\dfrac{u^{n+1}(x)}{n+1} + c$
$\int \dfrac{u'(x)}{u(x)}dx$	$\ln(\lvert u(x)\rvert) + c$
$n \in \mathbb{Q}^+ - \{1\}$ $\int \dfrac{u'(x)}{u^n(x)}dx$	$\dfrac{1}{(-n+1)u^{n-1}(x)} + c$
$\int u'(x)\cos(u(x))dx$	$\sin(u(x)) + c$
$\int u'(x)\sin(u(x))dx$	$-\cos(u(x)) + c$
$\int u'(x)e^{u(x)}dx$	$e^{u(x)} + c$

Remarques :

1. On ne peut pas préciser l'intervalle sur lequel on intègre dans les exemples ci-dessus car il faut connaitre l'expression de la fonction $x \mapsto u(x)$.

2. Quand on reconnait l'une des formes ci-dessus, on peut donner **sans calcul** une primitive, on dit que l'on fait de **l'intégration à vue** ou encore qu'on utilise le changement de variable $x \mapsto u(x)$.

3. Si on obtient l'une des formes ci-dessus **à une constante** $\alpha \neq 0$ **près**, alors il est facile en écrivant $1 = \alpha.\dfrac{1}{\alpha}$ d'intégrer à vue.

Exemple 2.3.

1. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f donnée par l'expression $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ admet des primitives. Déterminer l'expression des primitives de f sur chaque intervalle.

2. Déterminer l'expression des primitives de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{12x+5}}$ (on n'oubliera pas de préciser sur quel intervalle on se place)

3. Calculer $\int xe^{x^2}dx$.

4. $\int \sin(12t)dt = ?$

2.1.4 La gestion des constantes d'intégration

Les constantes et la linéarité

Considérons l'exemple suivant :
Je calcule sur $]-1, +\infty[$:

$$F(x) = \int 12x^2 - \cos x \sin^2 x + \frac{12}{(x+1)^3} dx$$

.

J'utilise la linéarité des primitives :

$$F(x) = 12 \int x^2 dx - \int \cos x \sin^2 x dx + 12 \int \frac{1}{(x+1)^3} dx$$

Chaque primitive s'intègre à vue avec en principe pour chacune une constante d'intégration :

$$F(x) = 12\frac{x^3}{3} + c_1 - \frac{\sin^3 x}{3} + c_2 + 12\frac{1}{-2(x+1)^2} + c_3$$

Il est bien évident que l'expression finale peut s'écrire :

$$F(x) = 12\frac{x^3}{3} - \frac{\sin^3 x}{3} - 6\frac{1}{(x+1)^2} + c$$

avec c de type réel, constante sur $]-1, +\infty[$ (c'est à dire que la valeur de c est la même pour tous les x de $]-1, +\infty[$).

C'est tellement évident que lors des calculs on évitera d'écrire des constantes intermédiaires pour n'écrire qu'une constante dans l'expression finale.

Intégration d'une égalité sur un intervalle I.

Considérons une fonction f dérivable sur l'intervalle I et une fonction g continue sur I telles qu'on ait :

$$\forall x \in I,\ f'(x) = g(x)$$

On peut alors écrire : Sur I :

$$\int f'(x)dx = \int g(x)dx$$

d'où l'on déduit :

$$f(x) + c_1 = \int g(x)dx \text{ sur } I$$

avec $c_1 \in \mathbb{R}$ constante sur I.

Si l'on connait **une** primitive G de g sur I on écrira :

$$\forall x \in I, \; f(x) = G(x) + c_2$$

avec $c_2 \in \mathbb{R}$ constante sur I.

Il est clair que finalement :

$$\forall x \in I, \; f'(x) = g(x) \Rightarrow \forall x \in I, f(x) = G(x) + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$ constante. Là encore, on évitera lors de ces petits calculs l'écriture des constantes intermédiaires mais on n'oubliera pas la constante finale.

Exemple 2.4. *Soit f une fonction telle que $f'(x) = \sqrt{12-x}$ $\forall x \in]-\infty, 12[$ et $f(11) = 1$. Déterminer l'expression de f sur $]-\infty, 12[$. On suppose de plus que f est continue sur $]-\infty, 12]$, quelle est l'expression de f sur $]-\infty, 12]$?*

...

Intégration d'une égalité sur plusieurs intervalles.

Soit $A = I_1 \cup I_2 \cdots \cup I_n$ une union d'intervalles. Considérons une fonction f dérivable sur chaque intervalle de A et une fonction g continue sur chaque intervalle de A telles qu'on ait :

$$f'(x) = g(x) \quad \forall x \in A$$

Les résultats de la partie précédente s'appliquent sur chaque intervalle de A, on peut donc fixer une constante réelle c sur chaque intervalle de A telle que

$$f(x) = G(x) + c$$

et comme il y a plusieurs intervalles, ce n'est finalement pas une constante que l'on fixe mais plusieurs (autant qu'il y a d'intervalles), dans la pratique, on utilise des notations différentes pour exprimer ces constantes pour éviter toute confusion, par exemple $c_1, \; c_2, \ldots c_n$.

Exemple 2.5. *Soit f une fonction telle que $f'(x) = |12 - x|$ $\forall x \neq 12$. On sait que f est continue sur $\mathbb{R}$ et aussi $f(12) = -72$. déterminer l'expression de f sur $\mathbb{R}$.*

...

2.1.5 Intégration par parties pour les primitives

Définition 2.2. *On dit d'une fonction f qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I quand f est dérivable sur I et sa dérivée est une fonction continue sur I.*

Remarques :

1. Les fonctions de référence du tableau donné plus haut sont toutes de classe $\mathcal{C}^1$ là où elles sont définies.

2. La somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions $\mathcal{C}^1$ est aussi une fonction $\mathcal{C}^1$ (dans la mesure ou il n'y a pas de problèmes de définition).

Théorème 2.3. *Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I. On a alors fg' et $f'g$ qui admettent des primitives sur I et :*

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

Démonstration.

...

□

L'intégration par parties est particulièrement bien adaptée aux cinq cas suivants très classiques où P est un polynôme et a une constante non nulle :

1) L'intégrande est de la forme $P(x)e^{ax}$, on démarrera en reformulant e^{ax} comme la dérivée d'une de ses primitives.

2) L'intégrande est de la forme $P(x)\cos(ax)$, on démarrera en reformulant $\cos(ax)$ comme la dérivée d'une de ses primitives.

3) L'intégrande est de la forme $P(x)\sin(ax)$, on démarrera en reformulant $\sin(ax)$ comme la dérivée d'une de ses primitives.

4) L'intégrande est de la forme $P(x)\ln(x)$, on démarrera en reformulant $P(x)$ comme la dérivée d'une de ses primitives.

5) L'intégrande est de la forme $P(x)\arctan(x)$, on démarrera en reformulant $P(x)$ comme la dérivée d'une de ses primitives.

Exemple 2.6.

1. Calculer $\int xe^{12x}dx$.

...

2. Calculer $\int \ln x dx$.

...

2.2 Intégrales

2.2.1 Définition et propriétés

Théorème 2.4. *Soient f une fonction continue sur l'intervalle I et a, b deux éléments de I, alors la quantité $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive choisie F de f.*

Démonstration.

...

□

Définition 2.3. *Soit f une fonction continue sur l'intervalle I, F une de ses primitives sur I, a et b deux éléments de I, alors la quantité $F(b) - F(a)$ (encore notée $[F(x)]_a^b$) est appelée intégrale de f entre a et b et notée $\int_a^b f(x)dx$.*

Remarques :

1. L'ordre de a et b est important.
2. La variable x qui apparait dans l'intégrale est muette (contrairement aux primitives), on a donc $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.
3. En faisant $a = b$, on trouve $\int_a^a f(x)dx = 0$.
4. On choisit pour les calculs la primitive ayant l'expression la plus simple possible, c'est à dire sans constante d'intégration.

Exemple 2.7. *Calculer $\int_0^1 (\sqrt{x} - 1)^2 dx$.*

...

Propriété 2.3.
Soient f, g des fonctions continues sur l'intervalle I, soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soient a, b et c trois éléments de I :
1) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
2) $\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
3) $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$.
4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx$ (Relation de Chasles).

Dans la plupart des cas, on sait donner "à vue" une primitive de f, le calcul de l'intégrale en découle alors naturellement.

Exemple 2.8. *Calculer $\int_0^1 e^{12x} dx$.*

...

Intégration par parties

Théorème 2.5. *Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I. Soient a et b deux points de I, on a alors fg' et $f'g$ qui sont intégrables sur I et :*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Démonstration.

Identique à celle de l'IPP pour les primitives.

□

Propriété 2.4 (Positivité de l'intégrale)**.**
Soit f une fonction continue sur l'intervalle I et ***positive*** *sur I (c'est à dire $\forall x \in I \quad f(x) \geq 0$), soient a et b deux éléments de I tels que $a < b$, alors :*
1) $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
2) $\int_a^b f(x)dx = 0$ si et seulement si $f(x) = 0 \ \forall x \in [a, b]$.

Démonstration.
Le point numéro 2) de cette propriété est admis.
Preuve du point numéro 1) :

...

□

Corollaire
Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle I, soient a et b deux éléments de I tels que $a < b$, on suppose de plus que $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Démonstration.

...

□

2.2.2 Aire et intégrale

Soient $a < b$,(C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. On appelle D la région du plan délimité par (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a, \ x = b$.

L'unité d'aire est l'aire du rectangle engendré par le repère choisi.

Théorème 2.6. *Si f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$, alors l'aire de D, mesurée en unités d'aire, est égale à $\int_a^b f(t)dt$.*

...

Théorème 2.7. *Si f est une fonction continue et négative sur $[a, b]$, alors l'aire de D, mesurée en unités d'aire, est égale à $-\int_a^b f(t)dt$. On peut définir l'aire* ***algébrique*** *de D, c'est une mesure négative quand la courbe est située au-dessous de l'axe des abscisses. On a alors cette aire algébrique qui est égal à $\int_a^b f(t)dt$*

...

Théorème 2.8. *Si f est une fonction continue et de signe quelconque sur $[a, b]$, alors l'aire algébrique de D, mesurée en unités d'aire, est égale à la somme des aires des domaines situés au-dessus de l'axe des abscisses diminué de la somme des aires des domaines situés au-dessous. La encore, on trouve que $\int_a^b f(t)dt$ est l'aire algébrique de D.*

...

Exemple 2.9.

Dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm, on considère la partie D du plan délimitée par l'axe des abscisses et la courbe d'équation $y = x(x-1)(x-4)$ avec $1 \leq x \leq 4$. Calculer l'aire du domaine D.

...

2.2.3 Écrire une primitive avec une intégrale

Théorème 2.9. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ fixés, alors il existe une primitive et une seule F de f telle que $f(x_0) = y_0$, c'est la fonction $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$.*

Démonstration.

...

$\square$

PRIMITIVES ET INTÉGRALES : RECONNAITRE DES INTÉGRANDES USUELLES

Exercice 14 : Forme simple

Calculer les primitives suivantes en précisant préalablement sur quel(s) intervalle(s) on peut faire les calculs :

a) $\displaystyle\int x^2+2x+2\ dx$ b) $\displaystyle\int e^t+2\cos t-\sin t\ dt$ c) $\displaystyle\int dx$ d) $\displaystyle\int 12x\ dt$ avec $x\mathbb{N}\mathbb{R}$ fixé.
e) $\displaystyle\int \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\ dx$ f) $\displaystyle\int (t^2+\frac{1}{t^2})^2\ dt$ g) $\displaystyle\int \frac{x^5-2x^3+3x-1}{x^2}\ dx$ h) $\displaystyle\int 12\sqrt{t}\ dt$

Exercice 15 : Forme composée $\int u'f(u)dx$

Calculer en précisant, quand il s'agit de primitives, les intervalles sur lesquels on peut faire le calcul :

a) $\displaystyle\int \frac{6t^5}{1+t^6}\ dt$ b) $\displaystyle\int e^{12x}\ dx$ c) $\displaystyle\int \cos(3x)\ dx$ d) $\displaystyle\int \frac{t\ dt}{1+3t^2}$ e) $\displaystyle\int \sin t\cos t\ dt$.
f) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{12+e^{2x}}\ dx$. Déterminer la primitive qui vaut 42 en $x=0$.
g) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$ h) $\displaystyle\int xe^{x^2}\ dx$ i) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\ dx$ j) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln t)^5}{t}\ dt$ k) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}\ dx$

INTÉGRATION PAR PARTIES

Exercice 16 :

Calculer en précisant, quand il s'agit de primitives, les intervalles sur lesquels on peut faire le calcul :

a) $\displaystyle\int (x-1)\ln x\ dx$ b) $\displaystyle\int te^{2t}\ dt$ c) $\displaystyle\int x\sin 3x\ dx$ d) $\displaystyle\int_0^1 (x+1)e^x\ dx$
e) $\displaystyle\int xe^{2x}\ dx$ f) $\displaystyle\int (t^2-t)\ln t\ dt$ g) $\displaystyle\int_0^1 x^2e^x\ dx$ h) $\displaystyle\int t(\ln t)^2\ dt$
i) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t)\ dt$ (On sera amené à écrire $\dfrac{t}{1+t}$ sous la forme $a+\dfrac{b}{1+t}$ avec a et b réels à déterminer.)

Exercice 17 :

Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour chacune des intégrales suivantes, trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n à l'aide d'une intégration par partie :

a) $\displaystyle I_n=\int_0^1 x^ne^x\ dx$ b) $\displaystyle I_n=\int_1^e t(\ln t)^n\ dt$ c) $\displaystyle I_n=\int_1^e (\ln t)^n\ dt$

Chapitre 3

Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Tout le début du cours concerne des applications à valeurs **réelles.** Le cas des applications à valeurs complexes sera explicitement donné en fin de chapitre.

3.1 Généralites

Soit un compte en banque avec un taux d'intérêt annuel de $\alpha = 2\% = 0.02$ annuel. Soit Δt un tout petit intervalle de temps et $y(t)$ la somme sur le compte au temps t (en années).

On considère qu'entre l'instant t et l'instant $t + \Delta t$ on a gagné 2% de $y(t)$ **au prorata du temps** Δt, c'est à dire que le gain est $0.02 \times \Delta t \times y(t)$, donc :

$$y(t + \Delta t) = y(t) + 0.02 \times \Delta t y(t)$$

que l'on peut écrire :

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = 0.02 y(t)$$

Comme Δt est petit, la fraction est considérée comme un taux instantané qui est environ égal à la dérivée $y'(t)$, (sous réserve d'avoir $y(t)$ dérivable) ce qui nous conduit à l'équation :

$$y'(t) = 0.02 \times y(t)$$

.

C'est une équation qui exprime un lien entre la fonction inconnue $y(t)$ et sa dérivée. Elle est de la forme $y'(t) = \alpha y(t)$ avec α constante qui représente le taux d'intérêt.

Cette forme d'équation se retrouve dans d'autres situations usuelles :

- La taille d'une population ayant un taux d'accroissement naturel α (Pour $\alpha < 0$ la population diminue).
- L'évolution de la masse d'une substance radioactive dans le temps.

Définition 3.1.
Une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions ***inconnues*** *et leurs dérivées.*
L'ordre d'une équation différentielle est le degré maximal de différentiation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

Exemple 3.1.

• $y'(t) = 0.02y(t)$ *Dans cet exemple, la fonction inconnue est y, la lettre t désigne la variable de la fonction y, l'équation différentielle est d'ordre 1.*

• $y'^2 + xy' - y = 0$ *Dans cet exemple la fonction inconnue est y, x est la variable de la fonction et l'équation différentielle est d'ordre 1.*

• $f^{(3)} - 2tf' + t^2 = 0$ *La fonction inconnue est f, t est la variable de cette fonction et l'équation différentielle est d'ordre 3.*

> **Définition 3.2.**
> *Une fonction $f(x)$ sera solution sur un intervalle donné I d'une équation différentielle (E) d'ordre n quand :*
> *(i) f est n fois dérivable sur I*
> *(ii) En **substituant** $f(x)$ dans l'équation on a bien l'égalité voulue, pour tous les x de I.*

Vocabulaire : Le graphe dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'une solution f de (E) est appelé **courbe intégrale de** (E).

Exemple :

Soit l'équation

$$(E) \quad y'(t) = -12y(t)$$

1) La fonction $y(t) = t^2$ est-elle solution de (E) sur $\mathbb{R}$?
2) Même question avec la fonction $y(t) = e^{-12t}$

1) Il faut tester par le calcul si l'égalité entre le membre de gauche et le membre de droite est vérifiée ou pas, et cela pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Membre de gauche : je calcule $\forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) =$
Membre de droite : je calcule $\forall t \in \mathbb{R}, -12y(t) =$
L'expression est différente de l'expression , donc cette fonction $y(t) = t^2$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

2) Même démarche :
Membre de gauche : je calcule
Membre de droite : je calcule
On voit que les expressions sont , donc cette fonction $y(t) = e^{-12t}$ est

Exercice 18 :

a) Soit l'équation

$$(E) \quad y'(t) - ty(t) = -t^2 + 1$$

1) La fonction $y(t) = t^2$ est-elle solution de (E) sur $\mathbb{R}$?
2) Même question avec la fonction $y(t) = t$

b) Soit a un paramètre réel et soit l'équation $(E)\ :\ y' = ay$. Montrer que la fonction définie par $f(t) = \lambda e^{at}$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) Soit (E) : $-3y'' - xy' + 2y = 0$. Montrer qu'il existe un polynôme de degré 2 solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Problématique : y-a-t-il d'autres fonction $y(t)$ solutions, sur quels intervalles, et comment les trouver ?

— Résoudre une équation différentielle (E) sur I c'est trouver **toutes les fonctions** f **solutions** définies sur I. Dans la pratique, on essaie si possible de résoudre sur un intervalle I **maximal** (c'est à dire qu'il n'existe aucun intervalle J contenant I sur lequel f est solution de (E)).
— On ne sait pas toujours trouver l'expression des solutions, il existe donc des méthodes de calcul approché.
— Un des plus vieux textes mathématiques connu est une tablette en écriture cunéiforme où l'équation $y' = \alpha y$ est résolue de manière approchée (méthode d'Euler) dans le cadre d'un calcul d'intérêts (environ -3000 avant JC ...)

3.2 Equations différentielles linéaires d'ordre 1 sous forme résolue

Définition 3.3.
Ce sont les équations qui peuvent se formuler en :

$$(E) \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

Avec $a(t)$ et $b(t)$ qui sont deux fonctions continues définies sur un intervalle I et $y(t)$ le nom donné à la fonction inconnue.

Exemple 1 :

$$(E_1) \quad y'(t) - \frac{1}{t}y(t) = 2t$$

Je vois que (E_1) a bien la forme d'une équation linéaire d'ordre 1 sous forme résolue avec $a(t) = \frac{-1}{t}$, le facteur multiplicatif de $y(t)$, et $b(t) = 2t$, deux fonctions définies sur $I =]0, +\infty[$ ou $I =]-\infty; 0[$.

Exemple 2 :

$$(E_2) \quad y'(t) = 12y(t)$$

Il suffit de remarquer que (E_2) peut se reformuler de façon équivalente en :

$$(E_2) \qquad y'(t) - 12y(t) = 0$$

On voit alors la forme d'une équation linéaire d'ordre 1 sous forme résolue avec $a(t) = -12$ et $b(t) = 0$ qui sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3 :

$$(E_3) \quad ty'(t) = 12y(t)$$

Exemple 4 :

$$(E_4) \quad y'(t) = 12y^2(t)$$

Définition 3.4.
Soit $(E) \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$.
(i) Dans le cas où $b(t)$ *n'est pas la fonction nulle, on définit*

$$(E_H) \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

et on dit que (E_H) *est l'équation homogène associée à* (E).
(ii) Dans le cas où $b(t)$ *est la fonction nulle on dit que* (E) *est homogène.*

Exemple 1 :

$$(E_1) \quad y'(t) - \frac{1}{t}y(t) = 2t$$

Exemple 2 :

$$(E_2) \quad y'(t) = 12y(t)$$

Théorème 3.1. ***Formule pour les solutions d'une équation homogène***
Soit $(E_H) : y' + a(t)y = 0$ *avec* $t \mapsto a(t)$ *qui admet sur* I *une primitive* A *(ce qui est le cas si* a *est continue sur* I*).*
Alors l'ensemble $\mathcal{S}_H$ *des applications solutions de* (E_H) *définies sur* I *et à valeurs réelles est infini et donné par :*

$$\mathcal{S}_H = \{t \mapsto Ce^{-A(t)} \ ; \ C \in \mathbb{R}\}$$

Démonstration.

...

□

Exemple 1 :

$$(E_1) \quad y'(t) - \frac{1}{t}y(t) = 2t$$

1) Résoudre l'équation homogène associée à (E_1) sur $I =]0; +\infty[$, écrire l'ensemble des solutions sous forme paramétrée.

2) Même travail sur $]-\infty; 0[$.

3) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E_1) sur $\mathbb{R}^*$.

Exemple 2 :

$$(E_2) \quad y'(t) = 12y(t)$$

Résoudre (E_2) sur $\mathbb{R}$.

Théorème 3.2. ***Formule pour les solutions d'une équation non homogène***
Soit (E) : $y' + a(t)y = b(t)$ avec a et b qui sont des fonctions continues sur l'intervalle I et b qui n'est pas la fonction nulle.
(i) Pour trouver ***toutes les solutions*** *de l'équation non homogène (E), il faut d'abord* ***en trouver une****, notée y_p dans ce cours, et appelée solution particulière de (E).*
(ii) ***Les solutions*** *de (E) sont les fonctions y de la forme $y = y_H + y_p$, où y_H est la forme générale des solutions de (E_H) :*

$$y(t) = Ce^{-A(t)} + y_p$$

Autrement dit, l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions solutions de (E) sur (I) et à valeurs réelles est infini et donné par :

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto Ce^{-A(t)} + y_p(t) \ ; \ C \in \mathbb{R}\}$$

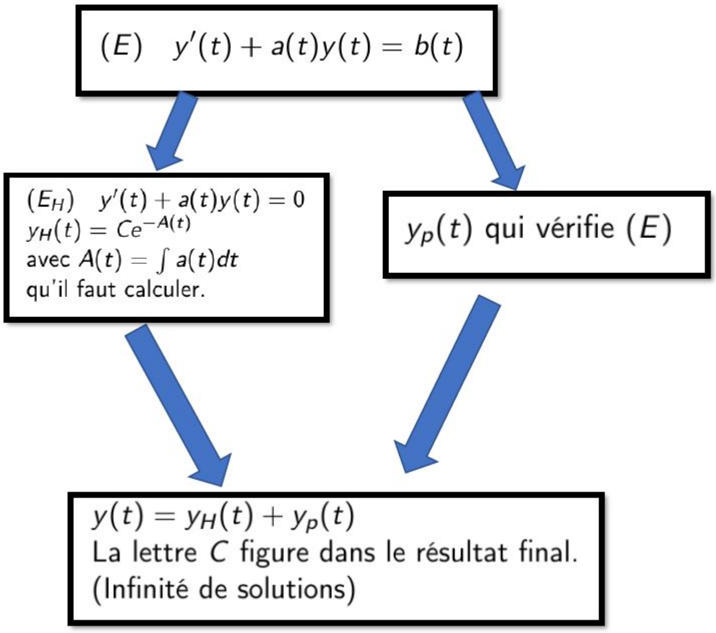
où A une primitive de a sur I.

Démonstration.

...

□

Equations linéaires d'ordre 1 sous forme résolue



Exemple 1 :

$$(E_1) \quad y'(t) - \frac{1}{t}y(t) = \frac{1}{t}$$

Résoudre (E_1) sur $I =]0, +\infty[$ en remarquant qu'il y a une fonction constante solution.
Donner les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}^*$.

Exemple 2 :

$$(E_2) \quad y'(t) - \frac{1}{t}y(t) = 2t$$

1) Trouver une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $y_p(t) = \alpha t^2$ soit solution de (E_2) sur $]0, +\infty[$.
2) Résoudre (E_2) sur $]0, +\infty[$.

Exercice 19 :

Soit $(E) \quad y'(t) + \dfrac{2}{t}y(t) = t - \dfrac{3}{t}$.

1) Chercher une solution particulière de (E) sur $I =]0, +\infty[$ sous la forme $y_p(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ où α, β et γ sont constantes.

2) Résoudre (E) sur $I =]0, +\infty[$ puis avec un minimum de calculs sur $I =]-\infty, 0[$.

Exercice 20 :

Soit l'équation $(E) \; : \; (x^2 + 1)y'(x) - xy(x) = 1 + 2x$.
a) Chercher a et b réels tels que la fonction $y_p(x) = ax + b$ soit une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Méthode de la variation de la constante

Théorème 3.3.
Soit l'équation $(E)\ :\ y' + a(t)y = b(t)$, *où* a *et* b *sont des fonctions continues sur l'intervalle* I, *alors il existe une solution particulière* y_p *de* (E) *sur* I *de la forme :*

$$y_p(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$$

avec $t \mapsto A(t)$ *qui est une primitive de* $t \mapsto a(t)$ *sur* I *et* $t \mapsto \lambda(t)$ *qui est une primitive de* $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ *sur* I.

Démonstration.

$$\ldots$$

□

Dans la pratique, "on s'inspire" de la formulation des solutions de (E_H), pour chercher une solution y_p par la méthode de variation de la constante.

Exemple :
Soit

$$(E)\ :\ y' - 2xy = 1 + \frac{y}{x}$$

c) Résoudre (E) sur $]0;+\infty[$ en trouvant une solution particulière avec la méthode de variation de la constante.
d) Avec un minimum de calculs, résoudre (E) sur $]-\infty;0[$.

Exercice 21 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre sur un intervalle le plus grand possible (à préciser) l'équation :

$$(E)\ :\ y' - x^n e^x = y$$

Exercice 22 :

Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation $ty' - 2y = 12t^2$ (On pourra chercher une solution particulière avec la méthode de variation de la constante).
Quel est l'ensemble des solutions de l'équation sur $]-\infty,0[$?

Utilisation de la linéarité

Théorème 3.4. ***Théorème de superposition de solutions***

Soient α *et* β *deux réels fixés, soient :*
ψ_1 *une solution sur* I *de* $(E_1)\ :\quad y'(t) + a(t)y(t) = b_1(t)$
ψ_2 *une solution sur* I *de* $(E_2)\ :\quad y'(t) + a(t)y(t) = b_2(t)$
alors $\psi = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2$ *est solution sur* I *de* $(E)\ :\quad y'(t) + a(t)y(t) = \alpha b_1(t) + \beta b_2(t)$.

Exercice 23 :

a) Soit $(E_1)\ :\ y' + 3y = 12\sin(3t)$. trouver une solution particulière de (E_1) sur $\mathbb{R}$ de la forme $\varphi_1(t) = a\sin(3t) + b\cos(3t)$.

b) Soit $(E_2)\ :\ y' + 3y = 6$. Trouver une solution particulière de (E_2) sur $\mathbb{R}$.

c) A l'aide des questions précédentes, sans calcul, trouver une solution particulière de $(E_3)\ :\ y' + 3y = 24\sin(3t) - 6$ puis résoudre (E_3) sur $\mathbb{R}$.

Conditions initiales

Théorème 3.5.
Soit $t_0 \in I$ et $(E)\ :\ y' + a(t)y = b(t)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sous forme résolue dont les coefficients sont des fonctions continues sur I, alors pour tout nombre y_0 il existe une et une seule solution f de (E) sur I vérifiant $f(t_0) = y_0$.

Démonstration.

...

□

Equations linéaires d'ordre 1 sous forme résolue

$(E) \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$

$(E_H) \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0$
$y_H(t) = Ce^{-A(t)}$
avec $A(t) = \int a(t)dt$
qu'il faut calculer.

$y_p(t)$ qui vérifie (E)

$y(t) = y_H(t) + y_p(t)$
La lettre C figure dans le résultat final.
(Infinité de solutions)

Equation des conditions initiales :
$y(t_0) = y_0$

On calcule C.
$y(t)$ devient unique.

Ce théorème est très important, il traduit le fait que si l'on connait l'état initial du système étudié, alors on peut en déduire l'état du système à n'importe quel moment du passé ou du futur. On dit aussi qu'il y a unicité au problème de Cauchy(mathématicien français, 1789/1857).

Exercice 24 :

Résoudre sur un intervalle approprié les équations suivantes :
a) $y' + 2xy = 2x$ et $y(0) = 2$, b) $y' - ty = t^2 - 1$ et $y(1) = 0$,
c) $xy' - y = x^2$ et $y(1) = 2$.

Rappel : Les résultats du cours permettent d'obtenir la formule d'une solution à une constante près sur un intervalle I. Si l'équation est définie sur plusieurs intervalles, il faut appliquer le cours plusieurs fois ce qui donne **différentes constantes** et donc au final, une fonction définie par morceaux.

Exercice 25 :

La température d'un objet varie avec une vitesse proportionnelle à la différence entre elle et la température du milieu ambiant. Ce qui se traduit par $y' = \alpha(y - T_a)$ où :
- $y(t)$ est la température du corps en fonction du temps t ,
- T_a : est la température ambiante (supposé constante)
- α est la constante de proportionnalité qui ne dépend que de l'objet.

A $8h$ un mélange à $20°C$ est placé dans un congélateur dont la température est maintenue à $-15°C$. A $8h10$, la température du mélange est de $0°C$. Un peu plus tard, on apporte le mélange dans une pièce où la température est maintenue à $40°C$. A $8h30$, la température du mélange est $25°C$.

a) Déterminer l'expression de $y(t)$ avant qu'on apporte le mélange dans la pièce. En déduire la valeur de α.
b) A quel moment le mélange est-il revenu à sa température initiale de $20°C$?
c) A quel moment a-t-on apporté le mélange dans la pièce ?

3.3 Cas des fonctions à valeurs complexes

Les fonctions considérées peuvent être des fonctions définies sur un intervalle I mais à valeurs complexes.

Exemple :

$a(t) = (3 + i)t$. Pour dériver ou intégrer on procède comme dans les réels : $A(t) = \dfrac{3 + i}{2}t^2$.

Attention à ne pas faire de généralisation abusive, il faut que les définitions aient un sens : $\sin(it)$ n'est pas défini en L1.

En revanche, il existe une fonction exponentielle, dite exponentielle complexe, définie sur $\mathbb{C}$ de la façon suivante : $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ pour x, y réels.

Exemple :

$e^{12+3i} = e^{12}e^{3i} = e^{12}(\cos(3) + i\sin(3))$

Si on considère la fonction **de la variable réelle** $t \to e^{-\frac{3+i}{2}t^2}$ c'est une fonction dérivable de dérivée :

Théorème 3.6.
Soit $(E)\ :\ y' + a(t)y = b(t)$ *avec* a *et* b *qui sont des fonctions continues sur l'intervalle* I *et à valeurs réelles.*
L'ensemble $\mathcal{S}$ *des fonctions solutions de* (E) *sur* (I) *et à valeurs* ***complexes*** *est infini et donné par :*

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto Ce^{-A(t)} + y_p(t)\ ;\ C \in \mathbb{C}\}$$

où y_p *est une solution particulière de* (E) *et* A *une primitive de* a *sur* I*.*

3.4 Autres équations d'ordre 1

Équations différentielles linéaires du premier ordre sous forme non résolue

Définition 3.5.
On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 (sous forme non résolue) une équation :

$$(L)\ :\ \omega(t)y' + a(t)y = b(t)$$

où a*,* ω *et* b *sont des fonctions définies sur un intervalle* I*.*

Il est facile de résoudre ces équations sur un intervalle I ou ω ne s'annule pas, car par division on se ramène au cas d'une équation sous forme résolue. Il est plus difficile de trouver des solutions maximales.

Exemple :

$$(E_H) : ty' + y = 0$$

Équations à variables séparées

C'est une équation d'inconnue une fonction $t \mapsto y(t)$ qui s'écrit $y'f(y) = g(t)$.

Si F est une primitive de f et G une primitive de g, elle équivaut à $F(y) = G(t) + C$ où C est une constante. Reste à écrire si possible cette égalité sous la forme $y = \varphi(t)$ (ce qui peut obliger à réduire l'intervalle de résolution).

Exemple :

$$y' = t^2 e^{-y}$$

Équations autonomes

Il s'agit des équations de la forme : $y' = f(y)$.

C'est un cas particulier d'équation 'a variables séparées dans la mesure où elle peut s'écrire $\dfrac{y'}{f(y)} = 1$.

On obtient $G(y) = t + C$ où G est une primitive de $\dfrac{1}{f}$. Mais il ne faut pas oublier les solutions constantes : $y = a$ où a est solution de $f(a) = 0$.
Exemple :

$$y' = y^2$$

3.5 Autres exercices

Exercice 26 : Datation au carbone 14

Le carbone contenu dans la matière vivante contient une infime proportion d'isotope radioactif C^{14}. Ce carbone radioactif provient du rayonnement cosmique de la haute atmosphère. Grâce à un processus d'échange complexe, toute matière vivante maintient une proportion constante de C^{14} dans son carbone total (essentiellement composé de l'isotope C^{12}). Après la mort, les échanges cessent et la quantité de carbone radioactif diminue. Cela permet de déterminer la date de la mort d'un individu.

a) On considère que la proportion $p(t)$ de C^{14} dans le carbone total perd $\frac{1}{8000}$ de sa valeur chaque année.

(i) Donner la définition du taux de variation (moyen) de p entre l'année t et l'année $t+1$.

(ii) Quelle est l'équation vérifiée par ce taux vu l'énoncé ?

(iii) En déduire que $p(t+1) = ap(t)$ avec $a = \dfrac{7999}{8000}$.

(iv) En déduire $p(t+2)$ en fonction de $p(t)$ puis conjecturer $p(n)$ en fonction de $p(0)$.

b) Des fragments de squelette humain de type Homo Sapiens sont retrouvés dans une caverne. L'analyse montre que la proportion de C^{14} n'est que $6,24\%$ de ce qu'elle serait dans les os d'un être vivant.

(i) Que représente $p(0)$ ici ?

(ii) En utilisant les résultats de a)(iv) écrire une équation vérifiée par le nombre d'années n écoulées depuis la mort de l'individu étudié.

(iii) Combien d'années se sont écoulées depuis la mort de l'individu ?

c) On suppose à présent que le taux instantané de la proportion $p(t)$ de C^{14} dans le carbone total perd $\frac{1}{8000}$ de sa valeur.

(i) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $p(t)$?

(ii) Donner la forme de $p(t)$.

(iii) On considère de nouveau l'individu de la question b), retrouver avec cette méthode le nombre d'années écoulées depuis sa mort et comparer les résultats numériques.

Exercice 27 : Croissance de population.

On considère une population évoluant en fonction du temps t.

a) Dans le modèle de Malthus on suppose que le taux d'accroissement instantané de la population est proportionnel au nombre d'individus $N(t)$ avec une constante k qui est égale à la différence entre le taux de natalité et le taux de mortalité qui sont supposés constants dans ce modèle.

(i) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par la fonction N ? (N est supposée dérivable)

(ii) Déterminer N si à l'instant $t = 0$, la population est de N_0 individus.

(iii) Comment évolue cette population lorsque t tend vers l'infini ?

b) Le modèle de Verhulst prend en compte que les ressources de l'environnement ne sont pas illimitées et suppose que le taux k n'est plus constant mais proportionnel à la différence entre une population maximale notée N^* et la population à l'instant t. On a alors $k(t) = r(N^* - N(t))$ et N est solution de l'équation différentielle $N'(t) = r\ N(t)(N^* - N(t))$ (appelée *équation logistique*).

(i) On admet que N ne s'annule pas et on pose $y(t) = \frac{1}{N(t)}$. Justifier que y est dérivable puis calculer N' en fonction de y et y'.

(ii) Remplacer N et N' par leurs expressions en fonction de y et y' dans l'équation logistique et vérifier que y est solution de l'équation différentielle

$$y' = r(1 - N^* y).$$

(iii) Résoudre l'équation précédente.

(iv) En déduire que $N(t) = \dfrac{N^*}{1 + Ke^{-rN^*t}}$ avec K constante réelle.

(v) Comment évolue cette population lorsque t tend vers l'infini ?

Exercice 28 :

Résoudre les équations suivantes sur des intervalles appropriés :

a) $y'\sqrt{1-4t^2} + y = 0$ b) $y' + y = \dfrac{1}{1+e^{2t}}$

Chapitre 4

Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Définition 4.1.
Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est une équation de la forme :

$$(E) \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$$

où a, b, c désignent trois constantes réelles avec $a \neq 0$ et où le second membre $d(t)$ est une fonction continue sur un intervalle I.

Exemple :

Définition 4.2. *Soit $(E) \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$.*
(i) Dans le cas où la fonction $d(t)$ n'est pas la fonction nulle, on définit

$$(E_H) \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

On dit alors que (E_H) est l'équation homogène associée à (E).
(ii) L'équation caractéristique de (E) est l'équation polynomiale :

$$az^2 + bz + c = 0$$

elle se résout dans $\mathbb{C}$ par le calcul de $\Delta = b^2 - 4ac$ et les solutions conduisent à la formule de $y_H(t)$ (Cf schéma).

Exercice 29 :

$$(E_1) \quad y'' - 5y' + 6y = t + 1, \qquad y(0) = \frac{47}{36}, y'(0) = \frac{1}{6}$$

$$(E_2) \quad y'' - 2y' + y = \cos t, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

$$(E_3) \quad y'' + y' + y = e^t$$

Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants