

Exo1Soit $(E) : |x-2| + |2x-6| \leq 28$ sur $\mathbb{R}$. $D(E) = \mathbb{R}$ évident.

On a les reformulations suivantes :

x	2	3
Reformulation de $ x-2 $	$-x+2$	$x-2$
Reformulation de $ 2x-6 $	$-2x+6$	$2x-6$
Reformulation de (E)	$-3x+8 \leq 28$	$3x-8 \leq 28$

Sur $]-\infty; 2]$, $(E) \Leftrightarrow -3x \leq 20$
 $\Leftrightarrow x \geq -\frac{20}{3}$

Ainsi $\text{Sol}(E) \cap]-\infty; 2] = \left[-\frac{20}{3}; 2\right]$

Sur $[2; 3]$, $(E) \Leftrightarrow -x \leq 24$
 $\Leftrightarrow x \geq -24$

Ainsi $\text{Sol}(E) \cap [2; 3] = [2; 3]$

Sur $[3; +\infty[$, $(E) \Leftrightarrow 3x \leq 36$
 $\Leftrightarrow x \leq 12$

Ainsi $\text{Sol}(E) \cap [3; +\infty[= [3; 12]$

$$f \text{ n'est pas dérivable, } \text{Sd}_{f(1)} = \left[-\frac{20}{3} ; +2 \right]$$

Exo 2

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{si } x \leq 1 \\ ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$

• $D_f = \mathbb{R}$ évident.

Pour ailleurs, $f|_{]-\infty; 1[}$ (x) = arctan x et

usuelle, continue

et $f|_{]1; +\infty[}$ (x) = ax + b usuelle (affine)

donc continue.

Il suffit donc de réfléchir à la continuité à droite en 1 de f .

$$\text{On } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a + b$$

$$\text{et } f(1) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Ainsi } f \text{ continue en } 1 \Leftrightarrow \boxed{a + b = \frac{\pi}{4}}$$

• On suppose désormais $a + b = \frac{\pi}{4}$ pour avoir f continue sur $\mathbb{R}$.

On peut donc écrire $f(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{si } x \leq 1 \\ ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$

On observe f dérivable sur $]-\infty; 1[$

$$\text{Sur }]-\infty; 1[\quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{et } \phi'(1) = \frac{1}{2}$$

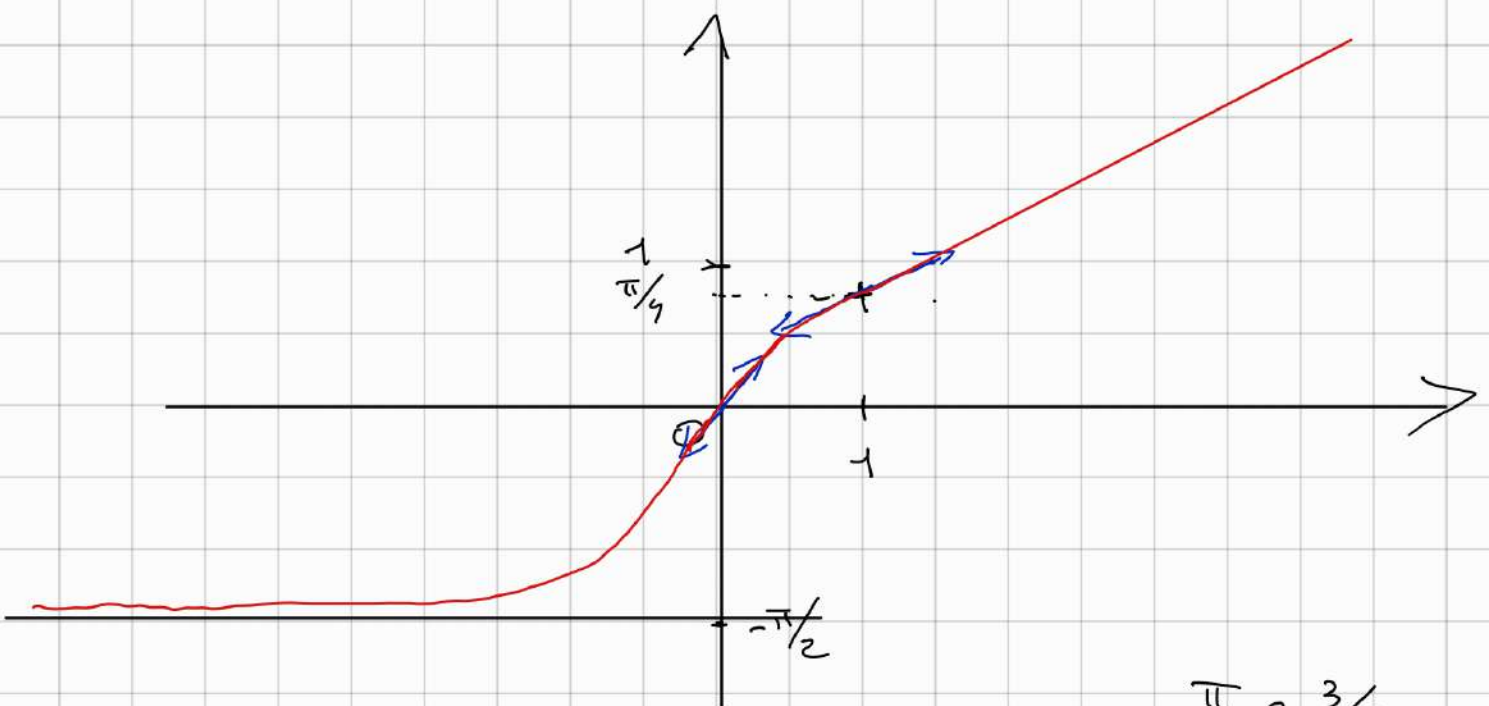
On observe aussi ϕ dérivable sur $[-1; +\infty[$
 et sur $]-\infty; -1]$, $\phi'(x) = a$
 et $\phi'(-1) = a$

Ainsi ϕ dérivable en $-1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$
 De plus, $b = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

Il y a donc un unique couple (a, b) qui convient, c'est $(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2})$

$$\text{Alors } \phi(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{\pi - 2}{4} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{et } \phi'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



$$\frac{\pi}{4} \approx \frac{3}{4}$$

Exo 3

Soit $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

a) Soit $p(x) = x^2 + 2x + 2$

$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$ ainsi $p(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$
donc $D_g = \mathbb{R}$.

On observe $g = \sqrt{\circ} \circ p$ avec $\sqrt{\circ}$ et p
 g° usuelles continues sur leur domaine, donc
 g est continue sur $D_g = \mathbb{R}$.

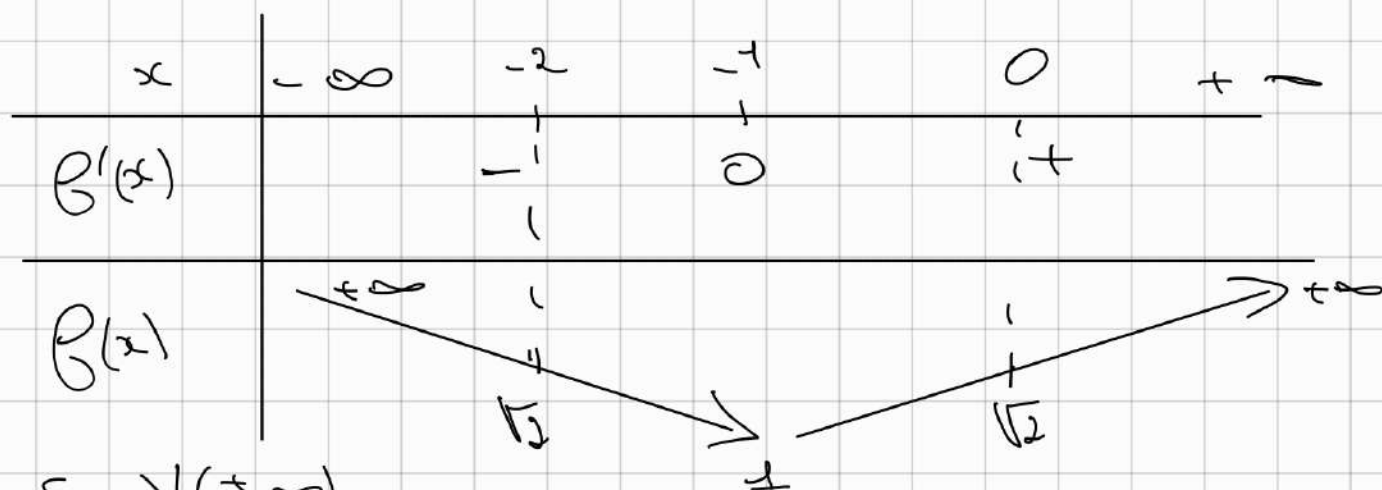
$\sqrt{\circ}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ mais par eno
 p est dérivable sur D_p .

Ainsi x valeurs douteuses $(\Rightarrow) \underbrace{p(x) = 0}_{\text{jamais vérifié}}$
de dérivabilité

Donc g est dérivable sur D_g .

b) Sur $\mathbb{R}$ / $g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

On a donc le T.V suivant :



Sur $\forall (\pm\infty)$,

$g(x) = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

Ainsi ϕ est continue sur $] -\infty; -1]$ et strictement décroissante sur $] -\infty; -1]$
 Donc d'après le th de bijection monotone elle induit une bijection de $] -\infty; -1]$ vers $\phi(] -\infty; -1]) = [1; +\infty[$
 Donc $\mathcal{D} = [1; +\infty[$

$\subseteq$ Soit $x \in [1; +\infty[$
 Alors $\phi^{-1}(x)$ est l'unique solution de
 (E) : $\phi(t) = x$ d'inconnue $t \in] -\infty; -1]$

$$\text{On } (E) \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 2t + 2} = x$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2t + 2 = x^2 \text{ car } t \text{ est positif}$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2t + 2 - x^2 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(2 - x^2) = -4 + 4x^2$$

$$= 4(x^2 - 1)$$

On $x \geq 1$ donc $x^2 \geq 1$ donc $\Delta \geq 0$
 Ainsi (E) $\Leftrightarrow \left(t = \frac{-2 - 2\sqrt{x^2 - 1}}{2} = -1 - \sqrt{x^2 - 1} \right)$
 $\vee \left(t = -1 + \sqrt{x^2 - 1} \right)$

$$\Leftrightarrow t = -1 - \sqrt{x^2 - 1} \text{ puisque } t \in] -\infty; -1]$$

Ainsi $\phi^{-1}: [1; +\infty[\longrightarrow] -\infty; -1]$
 $x \longmapsto -1 - \sqrt{x^2 - 1}$

Sur $]1; +\infty[$ on a $x^2 - 1 > 0$ ainsi φ^{-1} est dérivable sur $]1; +\infty[$ donc aussi en $\sqrt{2}$.

$$\text{Sur }]1; +\infty[\quad (\varphi^{-1})'(x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{donc } (\varphi^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2-1}} = -\sqrt{2}$$

d) On peut observer que $\varphi(-2) = \sqrt{2}$ ainsi $\varphi^{-1}(\sqrt{2}) = -2$

Or φ est dérivable en -2 avec $\varphi'(-2) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \neq 0$

Ainsi, d'après le th de bijection, φ^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$ avec

$$(\varphi^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{1}{\varphi'(-2)} = -\sqrt{2} \text{ et}$$

on retrouve bien le valeur déjà trouvée en c)

Exo 4

a) Soit $\beta(x) = (x+3)^x$
 Alors $\beta(x) = e^{x \ln(x+3)}$

Ainsi $D_\beta =]-3; +\infty[$

On observe $\beta = \ell_1 \circ (\ell_2 \circ (\ell_3 \circ \ell_4))$ avec
 $\ell_1(x) = e^x$ et $\ell_2(x) = x$ et $\ell_3(x) = \ln x$
 et $\ell_4(x) = x+3$

Chaque ℓ_i est cont. et dér. sur D_{ℓ_i} ,
 ainsi β est cont et dér. sur D_β

Soit D_f , $f'(x) = \left(\ln(x+3) + \frac{x}{x+3} \right) (x+3)^x$

b) Soit $g(x) = (\sin x)^{1/5}$

Alors $D_g = \mathbb{R}$ évident.

Par ailleurs, $g = u_1 \circ u_2$ avec
 $u_1(x) = x^{1/5}$ et $u_2(x) = \sin x$.

Chaque u_i est cont sur D_{u_i} ; donc g
 est contr. sur $D_g = \mathbb{R}$.

Mais u_1 est dér. sur $\mathbb{R}^*$ et par eno
 tandis que u_2 est dér. sur $\mathbb{R}$. Il y a
 donc peut-être des valeurs d'extremes
 de dérivabilité sur D_g .

x d'extremes $(\Rightarrow) \sin x = 0$

$(\Rightarrow) x = 0 \in]-\pi, \pi[$

On va donc dériver g sur un intervalle
 $]k\pi; (k+1)\pi[$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Sur $]k\pi; (k+1)\pi[$,
 $g'(x) = \frac{1}{5} (\sin x)^{-4/5} \cos x$

c) Soit $h(x) = \sqrt{2x - |x^2 - 3|}$

$x \in D_h (\Rightarrow) 2x - |x^2 - 3| \geq 0$

$(\Rightarrow) |x^2 - 3| \leq 2x$

$(\Rightarrow) -2x \leq x^2 - 3 \leq 2x$

$(\Rightarrow) (x^2 + 2x - 3 \geq 0) \wedge (x^2 - 2x - 3 \leq 0)$

$$\Leftrightarrow \left((x \leq -3) \vee (x \geq 4) \right) \quad \textcircled{\wedge}$$

$$(x \in [-4; 3])$$

$$\Leftrightarrow x \in [-4; 3]$$

Ainsi $D_h = [-4; 3]$



Par ailleurs, on observe que

$$h = u_1 \circ (u_2 - u_3 \circ u_4) \quad \text{avec}$$

$$u_1(x) = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad u_2(x) = 2x \quad \text{et}$$

$$u_3(x) = |x| \quad \text{et} \quad u_4(x) = x^2 - 3$$

Tous les u_i sont usuelles et continues sur D_{u_i} ; donc h est continue sur D_h .

Il y a des valeurs douteuses de dérivabilité à cause de $\sqrt{}$ et de valeur absolue.

$$x \text{ douteux des } D_h \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - |x^2 - 3| = 0 \\ \vee (x^2 - 3 = 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x = \sqrt{3}) \vee (x = -1) \\ \vee (x = 3) \end{cases}$$

Sur $]4; \sqrt{3}[$, $h(x) = \sqrt{2x + x^2 - 3}$

Donc $h'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2x+x^2-3}}$

Sur $]\sqrt{3}; 3[$, $h(x) = \sqrt{2x - x^2 + 3}$

done $h'(x) = \frac{-x+1}{\sqrt{2x-x^2+3}}$