Programme Analyse élémentaire

Analyse élémentaire 1 : Premier semestre

- Continuité en un point, continuité sur un intervalle
- Dérivabilité en un point, dérivabilité sur un intervalle
- Premières fonctions usuelle (puissance, valeur absolue) et fonctions définies par morceaux
- Théorème de bijection monotone
- Fonctions racines n-ièmes, fonctions trigonométriques et trigonométriques inverses
- Fonctions exponentielle en base a, logarithme en base a, partie entière.
- Comparaison de fonction : fonction négligeable devant une autre, fonction équivalente à une autre, applications aux calculs de limites
- Prolongement de fonctions, notion de classe $\mathcal{C}^1$
- Révision sur les suites, suites équivalentes, suites adjacentes

Analyse élémentaire 2 : Second semestre

- Suites et fonctions continues : théorème de caractérisation séquentielle, application des suites pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite.
- Approfondissement TVI, TAF, Rolle
- Classe $\mathcal{C}^n$, formule de Leibniz, formule de Taylor (faire rapidement)
- **Développement limité et asymptotiques pour des fonctions ou des suites. Application au calcul de limites ou à la recherche d'équivalents**

Chapitre 1

Fonctions, applications, continuité et dérivabilité

1.1 Vocabulaire de base, notion d'application

1.1.1 Vocabulaire de base

Définition 1.1.1.
(i) Soit I un intervalle. On appelle intérieur de I et on note $\mathring{I}$ l'intervalle obtenu en ouvrant les extrémités de I, par exemple pour $I = [3;12]$ on a $\mathring{I} =]3;12[$

(ii) On dira qu'un réel a est à l'intérieur de I quand $a \in \mathring{I}$.

(iii) Si I est un intervalle, on pourra toujours désigner par $\inf I$ *son extrémité gauche. Par exemple pour $I =]-5;12]$ on pourra écrire* $\inf I = -5$ *et si $I =]-\infty;8[$ alors* $\inf I = -\infty$. *On a le droit de dire* $\min I$ *pour désigner cette extrémité gauche uniquement dans le cas ou elle est un élément de l'intervalle (intervalle fermé à gauche) par exemple si $I = [-8;5[$ alors je peux dire* $\inf I = -8$ *mais je peux aussi dire* $\min I = -8$.

(iv) Si I est un intervalle, on pourra toujours désigner par $\sup I$ *son extrémité droite. Par exemple pour $I =]-5;12[$ on pourra écrire* $\sup I = 12$ *et si $I =]3;+\infty[$ alors* $\sup I = +\infty$. *On a le droit de dire* $\max I$ *pour désigner cette extrémité droite uniquement dans le cas ou elle est un élément de l'intervalle (intervalle fermé à droite) par exemple si $I = [-8;5]$ alors je peux dire* $\sup I = 5$ *mais je peux aussi dire* $\max I = 5$.

(v) Soit $a \in \mathbb{R}$. On désigne par voisinage de a un petit intervalle ouvert qui contient a et qu'on n'a pas envie de déclarer précisément. On le note $V(a)$.
Par exemple quand on écrit : $\forall x \in V(\frac{1}{2}),\ x^2 \leq x$ C'est une phrase vraie qui exprime l'idée que sur un intervalle ouvert suffisamment petit qui contient $\frac{1}{2}$, le carré d'un nombre est plus petit que le nombre. La phrase $\forall x \in V(1), x^2 \leq x$ n'est pas vraie.

(vi) Un voisinage de $+\infty$ est un intervalle de type $]A;+\infty[$ où A est un réel implicitement grand et positif qu'on n'a pas envie de déclarer précisément. De façon similaire un voisinage de $-\infty$ est un intervalle de type $]-\infty;B[$ ou B est un réel implicitement négatif et grand en valeur absolue qu'on n'a pas envie de déclarer.

■ **Test de compréhension du cours (corrigé sur le site) : Les phrases suivantes ont-elles du sens et si oui sont-elles vraies ou fausses.**

1) Si $I = [12; +\infty[$, alors $\mathring{I} =]12; +\infty[$.
2) Soit $I = [12; 12]$. Alors 12 est l'unique élément de $\mathring{I}$.
3) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $I = [x; x^2]$, alors $\frac{1}{2}(x + x^2) \in I$.
4) $\forall x \geq 1$ on a $\frac{1}{2}(x + x^2) \in]x, x^2[$.
5) Soit $x \geq 1$ alors on a $\frac{1}{2}(x + x^2) \in]x, x^2[$.
6) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq e^x$.
7) $\forall x \in V(+\infty), x^2 \leq e^x$.
8) $\forall x \in V(-\infty), x^{12} \leq e^x$.
9) $\forall x \in V(-\infty), \ln(x) \leq x^2$
10) Si I est un intervalle tel que $\min I = -12$ et $\max I = 6$ alors $I = [-12; 6]$.
11) Si I est un intervalle tel que $\min I = -12$ et $\sup I = 6$ alors $I = [-12; 6[$.
12) Si I est un intervalle tel que $\min I = -\infty$ et $\max I = 0$, alors $I = \mathbb{R}^-$.

1.1.2 Fonction vs application

Soit $f(x) = \ln(x) + 12$. Cette phrase déclare une fonction f (parlante) à l'aide d'une variable x muette de type réel implicite. On peut dire que c'est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ au sens où la variable de f est de type réel et que les valeurs de $f(x)$ sont de type réel.

Dès qu'on déclare une fonction de cette façon, il faut aussitôt préciser le domaine de définition de f et toujours en tenir compte pour la suite de la manipulation, **c'est mieux d'afficher les valeurs de x autorisées plutôt que le type des valeurs.**

Définition 1.1.2. *Soit E et F deux ensembles non vides.*
Une fonction de E vers F est une relation entre ces deux ensembles pour laquelle chaque élément de E est relié à ***au plus un*** *élément de F.*

Si maintenant je déclare :" Soit $\begin{array}{cccc} f: &]0; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln x + 12 \end{array}$ " alors j'affiche la même formule mais la variable x est déclarée (muette) dans $]0; +\infty[$ et en plus j'affiche qu'elle a le droit de prendre toutes les valeurs de $]0; +\infty[$. L'élément $f(x)$ lui est typé comme appartenant à $\mathbb{R}$ ce qui ne veut pas dire qu'il prendra toutes les valeurs de $\mathbb{R}$. On dit qu'on vient de déclarer une application de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ et on écrit $f \in \mathcal{F}(]0; +\infty[, \mathbb{R})$.

L'ensemble $]0; +\infty[$ est appelé ensemble de départ ou source de f tandis que l'ensemble $\mathbb{R}$ est appelé ensemble d'arrivée ou but de f.

Définition 1.1.3. *Soit E et F deux ensembles non vides.*
Une application de E vers F est une relation pour laquelle chaque élément de E (appelé ensemble de départ ou source) est relié à un ***unique*** *élément de F (l'ensemble d'arrivée ou but).*
On écrit $\begin{array}{cccc} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ pour déclarer la fonction f précisément avec ses ensembles de départ et d'arrivée et la formule. On peut aussi déclarer $f \in \mathcal{F}(E, F)$ quand on ne connait pas la formule de f.

• **Attention, on ne peut pas déclarer n'importe comment les applications, il est indispensable que la formule $f(x)$ soit définie sur Depart(f) et que $f(x)$ soit bien un élément de Arrivée(f).**

• **Quand on dit qu'une fonction (ou une application) est définie sur un intervalle I cela signifie qu'elle est définie en toute valeur $x \in I$.**

■ **Test de compréhension du cours (corrigé sur le site)** : **Les phrases suivantes ont-elles du sens et si oui sont-elles vraies ou fausses.**

1) La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

2) La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est définie sur $[12; +\infty[$.

3) Dire que " La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est définie sur $[0; +\infty[$" est équivalent à dire que " Le domaine de définition de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est $[0; +\infty[$".

4) Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & z^{12} \end{array}$. Alors $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{R}^+)$.

5) Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^{12} \end{array}$. Alors $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$.

6) Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sqrt{z} \end{array}$. Alors $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Étant donné une fonction, on peut déclarer une infinité d'applications "associées" en jouant sur la source ou sur le but, parmi ces applications, l'une d'elle est l'application associée par défaut.

Définition 1.1.4. *Soit f une fonction de E vers F.*
L'application par défaut associée à f (on dit aussi l'application naturellement associée à f) est l'application qui a pour source D_f et pour but l'ensemble usuel auquel appartiennent les images des éléments de la source.

■ **Test de compréhension du cours (corrigé sur le site)** :

Donner trois applications différentes, dont l'application par défaut, associées à la fonction $f(x) = \sqrt{x}$

Dans le supérieur on travaille presque tout le temps avec des applications, Souvent par abus de langage, on appelle fonction une application dont l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$. Ce sera souvent le cas dans ce module qui a vocation à parler des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles.

1.2 Continuité et dérivabilité d'une fonction

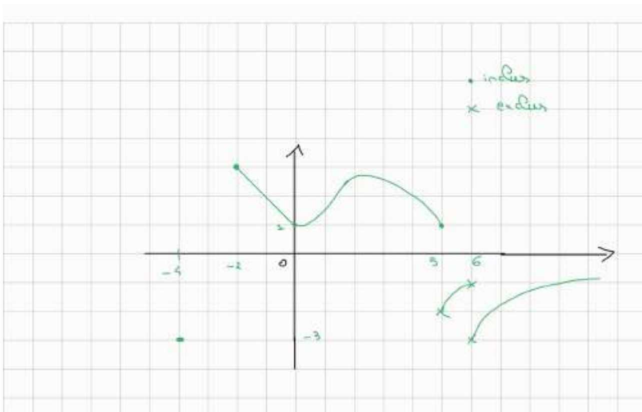
1.2.1 Les nuances de vocabulaire : continue SUR (un intervalle) $\neq$ continue EN (une valeur)

Définition 1.2.1.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
(i) Soit $a \in \mathring{I}$ (ainsi f est définie en a et "autour de a")
On dit que f est continue EN a si et seulement si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
On dit que f est continue à droite EN a si et seulement si $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.
On dit que f est continue à gauche EN a si et seulement si $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.
Pour une valeur a à l'intérieur de I, f continue en a est donc équivalent à f continue à droite et à gauche EN a.
Remarque : Si f n'est pas définie à gauche (respectivement à droite) en a, alors f continue en a se réduit à f continue à droite (respectivement à gauche) en a.

(ii) On dit que f est continue SUR I si et seulement si f est continue EN toute valeur de $\mathring{I}$ et continue à droite EN $\min I$ quand il existe et continue à gauche EN $\max I$ quand il existe

Conséquence : Quand on dit que " f est continue SUR I" cela ne voudra pas forcément dire que f est continue EN toute valeur de I contrairement au vocabulaire "f définie SUR I" qui signifie que f est définie en toute valeur de I.

■ **Test de compréhension du cours (corrigé sur le site) : Soit f la fonction dont le graphe figure ci-dessous. Les assertions suivantes ont-elles du sens et si oui sont-elles vraies ou fausses ?**



1) f semble continue en 0.
2) f semble discontinue en -2 car continue à droite en -2 mais pas continue à gauche en -2.
3) f semble discontinue en 5 car pas continue à droite en 5.
4) f semble discontinue en 6.
5) f semble discontinue en -4.
6) f semble continue sur $[0; 5]$.
7) f semble continue sur $[5; 6]$.
8) f semble continue sur $[5; 6[$.

1.2.2 Conditions suffisantes de continuité : les théorèmes d'opérations

Propriété 1.2.1. *Argumenter la continuité*

(i) Si f et g sont des fonctions continues sur l'entièreté de leur domaine de définition respectif, alors les fonctions $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$, $f \circ g$ ... sont elles aussi continues sur leur propre domaine de définition.
Autrement dit, si une fonction peut se formuler comme le résultat d'une ou plusieurs opérations entre des fonctions continues sur l'entièreté de leur domaine de définition respectif, alors cette fonction sera elle aussi continue sur son propre domaine de définition.

(ii) Si f est continue sur un intervalle I et g continue sur $f(I)$ alors $g \circ f$ est continue sur I.

Propriété 1.2.2. *Repérer les valeurs qui nécessitent une étude :*
Chaque valeur, s'il en existe, qui crée une opération entre du continu et du non continu doit faire l'objet d'une étude ciblée où l'on va réfléchir sur l'existence et la valeur de la limite de la fonction.

■ **Test de compréhension du cours (corrigé sur le site) : Les assertions suivantes ont-elles du sens et si oui sont-elles vraies ou fausses ?**

1) Soit $m_1(x) = x^2 - 3$ et $m_2(x) = x + 8$. Ce sont deux fonctions polynômes continues sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $f(x) = (x^2 - 3)(x + 8)$ est elle aussi continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de m_1 par m_2.

2) Soit $m_1(x) = x^2 - 3$ et $m_2(x) = x + 8$. Ce sont deux fonctions polynômes continues sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x + 8}$ est elle aussi continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de m_1 par m_2.

3) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$ mais pas continue en 0. Soit $g(x) = \sqrt{f^2(x) + 12}$. Alors g est continue sur $\mathbb{R}$ d'après la propriété 2.1 (ii).

4) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$ mais pas continue en 0. Soit $g(x) = f(x^2 - 12)$. Alors g n'est pas continue en 0 puisque f n'est pas continue en 0.

5) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$ mais pas continue en 0. Soit $g(x) = f(x^2 - 12)$. Alors il y a deux valeurs et deux seulement qui nécessitent une étude ciblée de continuité.

6) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$ mais pas continue en 0. Soit $g(x) = f(x^2 - 12)$. si l'on veut faire l'étude complète de la continuité de f on va s'intéresser à $\lim_{x \to \pm\sqrt{12}} g(x)$.

7) La fonction $f(x) = \ln(x - 12) + \sqrt{x}$ peut se formuler comme résultat d'opérations entre trois fonctions usuelles continues sur leur domaine de définition respectif donc elle est aussi continue sur D_f.

1.2.3 Dérivable SUR un intervalle $\neq$ dérivable EN un point

Définition 1.2.2.
Soit f une fonction définie en $a \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle taux de variation entre a et x la fonction $T(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
Soit $h \in \mathbb{R}$. Le taux de variation de f entre a et $a + h$ est la fonction $t(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
Si la fonction $T(x)$ admet une limite quand x tend vers a, alors la fonction $t(h)$ aura la même limite quand h tend vers 0 et vice versa.

Souvent par abus de langage on parle de taux de variation en a pour désigner ces fonctions au lieu de préciser taux de variation entre a et x ou taux de variation entre a et $a + h$.

Définition 1.2.3.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
(i) Soit $a \in \mathring{I}$.
On dit que f est dérivable EN a si et seulement si $\lim_{h\to 0} t(h)$ (ou ce qui revient au même $\lim_{x\to a} T(x)$) existe et est finie. On note alors $f'(a)$ cette limite.
On dit que f est dérivable à droite EN a si et seulement si $\lim_{h\to 0^+} t(h)$ existe et est finie. On note alors $f'_d(a)$ cette limite.
On dit que f est dérivable à gauche EN a si et seulement si $\lim_{h\to 0^-} t(h)$ existe et est finie. On note alors $f'_g(a)$ cette limite.
Pour un point a à l'intérieur de I, f dérivable en a est équivalent à (f dérivable à droite et à gauche EN a) et ($f'_d(a) = f'_g(a)$)

(ii) On dit que f est dérivable SUR I si et seulement si f est dérivable EN tout point de $\mathring{I}$ et dérivable à droite EN $\min I$ quand il existe et dérivable à gauche EN $\max I$ quand il existe

Conséquence : Quand on dit que " f est dérivable SUR I " cela ne voudra pas forcément dire que f est dérivable EN tout point de I contrairement au vocabulaire "f définie SUR I"

Propriété 1.2.3.
Si f est dérivable en $a \in D_f$ alors le vecteur $\vec{T}(1; f'(a))$ est un vecteur tangent à la courbe de f.

1.2.4 Dérivable en a "c'est plus fort " que continue en a

Propriété 1.2.4.
Si f est dérivable en a alors f est continue en a. la réciproque est fausse.

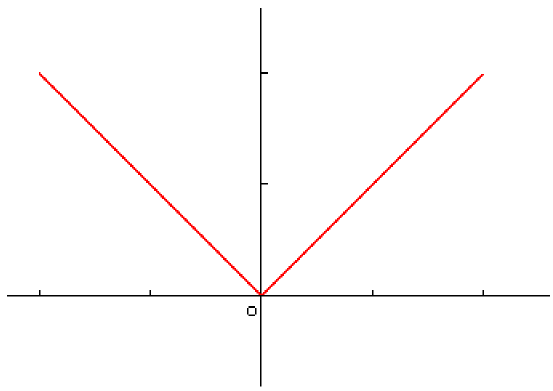
■ Preuve en vidéo.

Chapitre 2

Premières fonctions usuelles : valeur absolue et fonction puissance entière

2.1 La fonction $|x|$

Propriété 2.1.1.
La formule valeur absolue est définie par $|u| = u$ *quand* $u \geq 0$ *et* $|u| = -u$ *quand* $u < 0$.
La fonction $f(x) = |x|$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$. *Son image vaut* $f(\mathbb{R}) = [0; +\infty[$.
Elle est dérivable sur $]-\infty; 0]$ *et sur* $[0; +\infty[$ *mais non dérivable en 0.*
Par ailleurs, $\forall x < 0,\ f'(x) = 1; \quad \forall x > 0,\ f'(x) = 1; \quad f'_g(0) = -1; \quad f'_d(0) = 1.$
Il est très important de retenir que valeur absolue est continue en tout point où elle est définie mais pas dérivable en tout point où elle est définie.



Graphe de la fonction valeur absolue

Propriété 2.1.2. *Automatismes*
(o) Reformuler sans valeur absolue, en particulier pour dériver.
(i) Reformulation d'inégalité.

$$\forall u \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}, |u| \leq h \Longleftrightarrow -h \leq u \leq h$$

(ii) Reformulation de $|u| = \alpha$:

(iii) la valeur absolue "passe" au produit (et donc aux puissances entières) et au quotient :

$$\forall (u, v, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{N},\ |uv| = |u||v|; \quad \left|\frac{u}{v}\right| = \frac{|u|}{|v|}; \qquad |u^n| = |u|^n$$

(iv) L'inégalité triangulaire :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, , ||u| - |v|| \leq |u + v| \leq |u| + |v|$$

2.2 Les fonctions puissances entières positives

Propriété 2.2.1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$; La formule u^n est définie par $u^n = \underbrace{u \times u \times u \cdots \times u}_{n \text{ fois}}$
Soit $n = 0$; la formule u^n est définie par $u^0 = 0$.
Quand $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f(x) = x^n$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x^n)' = nx^{n-1}$$

On retient donc que cette fonction est continue et dérivable en tout point où elle est définie.

2.3 Les fonctions puissances entières négatives

Propriété 2.3.1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *; La formule* u^{-n} *est définie par* $u^{-n} = \dfrac{1}{u^n} = \dfrac{1}{u \times u \cdots \times u}$
La fonction $f(x) = x^{-n}$ *est définie, continue et dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *et :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, (x^{-n})' = -nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

On retient donc que cette fonction est continue et dérivable en tout point où elle est définie.

Chapitre 3

Le théorème de bijection monotone et les fonctions racines n-ièmes

3.1 Le théorème de bijection pour définir d'autres fonctions usuelles

Définition 3.1.1.
(i) Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ une application de E vers F. On dit que f est une bijection quand chaque élément de l'ensemble d'arrivée F de f possède un et un seul antécédent dans la source E de f. On peut alors définir une application $g \in \mathcal{F}(F, E)$ unique, appelée bijection réciproque de f, qui a chaque élément t de l'arrivée F associera l'unique antécédent de t par f dans sa source. Cette application g est désignée par la notation f^{-1} mais on ne sait pas toujours la formuler bien qu'on sache qu'elle existe.
C'est aussi l'unique application ayant la propriété $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$.

(ii) On dit qu'une fonction f induit une bijection de I vers J quand on peut d'une part poser une application associée de I vers J et que d'autre part cette application est bijective.

Exemple : Soit la fonction $f(x) = x^2$

1) Est-ce qu'elle induit une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^-$?

2) Est-ce qu'elle induit une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$?

3) Est-ce qu'elle induit une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^+$?

Théorème 3.1.1. ***Théorème de bijection d'une fonction réelle***

Soit f une fonction **continue strictement monotone** *sur un intervalle I. Alors :*
1) f induit une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle $J = f(I)$, donc on peut poser sa bijection réciproque nommée par défaut f^{-1} et qui est définie de J dans I.

2) La bijection réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur J, de même sens de monotonie que f. Sa courbe est la symétrique par rapport à la droite $y = x$ de la courbe de f.

3) Si f est dérivable en un point x_0 de I et si $f'(x_0)$ est non nul, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Exemple :

La fonction $f(x) = x^2$ est continue et strictement croissante sur $I = [0; +\infty[$. On peut donc d'après le théorème de bijection affirmer qu'elle induit une bijection de I vers $J = f(I) = [0; +\infty[$. Ainsi on peut poser sa bijection réciproque qu'on va par défaut nommer f^{-1} dans un premier temps.

Soit t dans l'arrivée de f. Peut-on formuler $f^{-1}(t)$?

3.2 Les fonctions racines n-ièmes

3.2.1 La fonction $\sqrt{x}$

Propriété 3.2.1.
L'application $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & t & \longmapsto & t^2 \end{array}$ *est une bijection. La formule* $\sqrt{u}$ *désigne l'antécédent d'une valeur* u *positive par cette application. On écrit aussi* $\sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$
La fonction $\sqrt{x}$ *est donc définie sur* $\mathbb{R}^+$ *en tant que la bijection réciproque de* f.
Elle est dérivable sur $]0; +\infty[$ *mais pas en* 0 *(pente infinie)et* $\forall x > 0, (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Propriété 3.2.2.
(i) $\forall x \geq 0,\ \sqrt{x}^2 = x = (x^{\frac{1}{2}})^2$
(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} = |x| = (x^2)^{\frac{1}{2}}$

3.2.2 Les fonctions $x^{\frac{1}{2n}}$

Propriété 3.2.3.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$
L'application $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & t & \longmapsto & t^{2n} \end{array}$ *est une bijection. La formule* $u^{\frac{1}{2n}}$ *désigne l'antécédent d'une valeur* u *positive par cette application. On écrit aussi* $\sqrt[2n]{u}$
La fonction $g(x) = x^{\frac{1}{2n}}$ *est donc définie sur* $\mathbb{R}^+$ *en tant que bijection réciproque de* f.
Elle est dérivable sur $]0; +\infty[$ *mais pas en* 0 *(pente infinie)et* $\forall x > 0, g'(x) = \dfrac{1}{2n} x^{\frac{1}{2n}-1}$

Propriété 3.2.4.
(i) $\forall x \geq 0,\ (x^{1/2n})^{2n} = x = (\sqrt[2n]{x})^{2n}$
(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^{2n})^{2n} = |x| = \sqrt[2n]{x^{2n}}$

3.2.3 Les fonctions $x^{\frac{1}{2n+1}}$

Propriété 3.2.5.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$
L'application $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & t^{2n+1} \end{array}$ *est une bijection. La formule* $u^{\frac{1}{2n+1}}$ *désigne l'antécédent d'une valeur* u *réelle par cette application. On écrit aussi* $\sqrt[2n+1]{u}$
La fonction $g(x) = x^{\frac{1}{2n+1}}$ *est donc définie sur* $\mathbb{R}$ *en tant que bijection réciproque de* f.
Elle est dérivable sur $]-\infty; 0[$*et sur* $]0; +\infty[$ *mais pas en* 0 *(pente infinie)et* $\forall x \neq 0, g'(x) = \dfrac{1}{2n+1} x^{\frac{1}{2n+1}-1}$

Exemple : Dessiner la courbe de $g(x) = x^{1/3}$

Propriété 3.2.6.
(i) $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x^{1/(2n+1)}\right)^{2n+1} = x = \left(\sqrt[2n+1]{x}\right)^{2n+1}$
(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x^{2n+1}\right)^{2n+1} = x = \sqrt[2n+1]{x^{2n+1}}$

3.2.4 Équations usuelles avec les puissances

Propriété 3.2.7.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$
(i) L'équation $u^{2n} = \alpha$ *sur* $\mathbb{R}$.

(ii) L'équation $u^{2n+1} = \alpha$ *sur* $\mathbb{R}$.

Chapitre 4

Les fonctions trigonométriques et trigonométriques inverses

Les fonctions $\cos$ et $\sin$

Propriété 4.0.1. *Soit u un réel et M_u le point du cercle trigonométrique tel que $(\vec{i}, \vec{OM}) = u\ [2\pi]$. Le réel $\cos u$ est défini comme l'abscisse du point M_u, le réel $\sin u$ est définie comme l'ordonnée du point M_u.*
Les fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1;1]$.
Elles sont périodiques de période 2π.
$\forall x \in \mathbb{R},\ (\cos x)' = -\sin x$ *et* $(\sin x)' = \cos x$.

Propriété 4.0.2.
1)

$$\begin{aligned}\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, (\cos u = \cos v) &\Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ u = v + k2\pi \text{ ou } u = -v + k2\pi)\\ &\Longleftrightarrow (u = v[2\pi]) \vee (u = -v[2\pi])\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ (\sin u = \sin v) &\Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ u = v + k2\pi \text{ ou } u = \pi - v + k2\pi)\\ &\Longleftrightarrow (u = v[2\pi]) \vee (u = \pi - v[2\pi])\end{aligned}$$

Exemple :

La fonction $\tan x$

Propriété 4.0.3.
Soit $u \in \mathbb{R}$ et $u \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$. Le réel $\tan u$ est défini par $\tan u = \frac{\sin u}{\cos u}$.
La fonction $\tan x$ est définie, continue et dérivable sur $D_{tan} = \cup_{k\in\mathbb{Z}}] - \pi/2; \pi/2[$. Elle est π périodique et impaire.
$\forall x \in D_{tan},\ (\tan')(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$
On retient donc que la fonction $\tan$ est continue et dérivable en tout point où elle est définie.
Géométriquement la tangente d'un angle orienté est le rapport (Dénivelé algébrique)/(Écart algébrique)

Exemple :
Calculer les tangentes des arguments des nombres complexes suivants :
$z_1 = 3 - 2i\,;\quad z_2 = -3 + i\,;\quad z_3 = -2 - i\,;\quad z_4 = 2 + 3i\,;\quad z_5 = 1 + 3i$

Propriété 4.0.4.

$$\forall (u, v) \in D_{\tan}^2, (\tan u = \tan v) \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ u = v + k\pi)$$

Exemple :

La fonction $\arctan x$

Propriété 4.0.5.
L'application $\begin{array}{rccc} f: &] - \pi/2; \pi/2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \tan t \end{array}$ *est une bijection.*
Sa bijection réciproque f^{-1} est nommée $\operatorname{arctan} x$. Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $] - \pi/2; \pi/2[$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\begin{array}{ll} \forall x \in \quad \dots \quad & , \arctan(\tan(x)) = x \\ \forall x \in \quad \dots \quad & , \tan(\arctan(x)) = x \end{array}$$

Propriété 4.0.6.
*Soit un angle **orienté** θ qui n'est pas un angle droit ; désignons par x la valeur de $\tan\theta$.*
- Si θ est un angle aigu en tant qu'angle non orienté, alors $\arctan x$ est une mesure de θ.
- Si θ est un angle obtus en tant qu'angle non orienté, alors $\pi + \arctan x$ est une mesure de θ.

Exemple :

Donner une forme trigonométrique de $z_1 = 3 - 4i$ à l'aide de arctan.
Même question avec $z_2 = -2 + 5i$.

La fonction $\arcsin x$

Propriété 4.0.7. *L'application* $\begin{array}{rccc} f: & [-\pi/2;\pi/2] & \longrightarrow & [-1;1] \\ & t & \longmapsto & \sin t \end{array}$ *est une bijection.*
Sa bijection réciproque f^{-1} est nommée $\arcsin x$. Elle est continue sur $[-1;1]$ et à valeurs dans $[-\pi/2;\pi/2]$. Elle est dérivable sur $]-1;1[$ mais pas en ± 1 (pente infinie).

$$\forall x \in]-1;1[,\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Propriété 4.0.8.
*Soit un angle **orienté** θ ; désignons par x la valeur de $\sin\theta$.*
- Si θ est un angle aigu en tant qu'angle non orienté, alors $\arcsin x$ est une mesure de θ.
- Si θ est un angle obtus en tant qu'angle non orienté, alors $\pi - \arcsin x$ est une mesure de θ.

Exemple :

Donner une forme trigonométrique de $z_1 = 3 - 4i$ à l'aide de arcsin.
Même question avec $z_2 = -2 + 5i$.

La fonction $\arccos x$

Propriété 4.0.9. *L'application* $\begin{array}{rccc} f: & [0;\pi] & \longrightarrow & [-1;1] \\ & t & \longmapsto & \cos t \end{array}$ *est une bijection.*
Sa bijection réciproque f^{-1} *est nommée* $\arccos x$*. Elle est continue sur* $[-1;1]$ *et à valeurs dans* $[0;\pi]$*. Elle est dérivable sur* $]-1;1[$ *mais pas en* ± 1 *(pente infinie).*

$$\forall x \in]-1;1[, \ \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Interprétation géométrique

Propriété 4.0.10.
Soit un angle ***orienté*** θ *; désignons par* x *la valeur de* $\cos\theta$*.*
- Si θ *est un angle orienté dans le sens trigo et plus petit qu'un angle plat, alors* $\arccos x$ *est une mesure de* θ*.*
- Si θ *est un angle orienté dans le sens inverse et plus petit qu'un angle plat, alors* $-\arccos x$ *est une mesure de* θ*.*

Exemple :

Donner une forme trigonométrique de $z_1 = 3 - 4i$ à l'aide de arccos.

Même question avec $z_2 = -2 + 5i$.

Propriété 4.0.11.
1) L'équation $\cos u = a$ ***d'inconnue*** u ***réelle.***
Soit $a \in \mathbb{R}$ *alors il y a deux cas pour l'équation* $\cos u = a$
(i) Quand $|a| > 1$*, il n'y a pas de solution.*
(ii) Quand $|a| \leq 1$ *il y a une infinité de solutions qui forment l'ensemble :*

$$S_{ol} = \{\arccos(a) + k2\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\arccos(a) + k2\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$$

2) L'équation $\sin u = a$ ***d'inconnue*** u ***réelle.***
Soit $a \in \mathbb{R}$ *alors il y a deux cas pour l'équation* $\sin u = a$
(i) Quand $|a| > 1$*, il n'y a pas de solution.*
(ii) Quand $|a| \leq 1$ *il y a une infinité de solutions qui forment l'ensemble :*

$$S_{ol} = \{\arcsin(a) + k2\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin(a) + k2\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$$

3) L'équation $\tan u = a$ ***d'inconnue*** u ***réelle dans*** $D_{\tan}$
Soit $a \in \mathbb{R}$ *alors l'équation* $\tan u = a$ *possède une infinité de solutions qui forment l'ensemble :*

$$S_{ol} = \{\arctan(a) + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$$

Chapitre 5

Fonctions exponentielle de base a, logarithme de base a et partie entière

7. La fonction exponentielle de base a avec $a > 0$: $x \mapsto a^x$

Propriété 5.0.1. *Soit* $a > 0$.
$f(x) = a^x$ *est définie par* $f(x) = e^{x \ln a}$. *Elle est continue sur* $\mathbb{R}$ *et dérivable sur* $\mathbb{R}$.

$$⚠ : \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (\ln a)a^x$$

Par exemple $2^\pi = e^{\pi \ln 2}$

La définition coïncide avec celle des puissances usuelles quand x est entier ou rationnel. Par exemple $3^5 = e^{\ln 3}$. les règles de calculs usuelles sur les puissances sont encore vérifiées par exemple $\dfrac{1}{a^x} = a^{-x}$ ou $(a^x)^n = a^{nx}$

8. La fonction logarithme de base a

Propriété 5.0.2. *Soit* $a > 0$.
$f(x) = \log_a(x)$ *est définie par* $f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$. *Elle est continue et dérivable sur* $]0; +\infty[$.

$$\forall x > 0\ f'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \log_a(a^x) = x$$

9. La fonction partie entière

Propriété 5.0.3.
Soit $x \in \mathbb{R}$. *La formule* $\lfloor x \rfloor$ *désigne le plus grand entier relatif inférieur ou égal à* x. *Pour l'écrire en langage math on écrit donc que (i)* $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ *et (ii)* $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
Remarque : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \iff x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$
La fonction $f(x) = \lfloor x \rfloor$ *est définie sur* $\mathbb{R}$, *continue (constante) sur chaque intervalle* $[n; n+1[$ *où* $n \in \mathbb{Z}$ *mais pas continue sur* $\mathbb{R}$ *car elle n'est pas continue à gauche de* n *quand* $n \in \mathbb{Z}$.

Chapitre 6

Calcul de limites et équivalents

Dans tout ce cours, f désigne une fonction ou une application de la variable réelle à valeur réelle. $\bar{\mathbb{R}}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ auquel on ajoute $+\infty$ et $-\infty$ comme si c'étaient des nombres, ainsi écrire $a \in \bar{\mathbb{R}}$ ça veut dire qu'on peut avoir a réel ou infini.

1. Fonctions définies au voisinage d'un point

Définition 6.0.1.
(i) Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est définie au voisinage de a s'il existe un intervalle I d'intérieur non vide, contenant a tel que f soit définie sur I sauf éventuellement en a, autrement dit $I \subset D_f$ ou éventuellement $I \backslash \{a\} \subset D_f$.

(ii) On dit que f est définie au voisinage de $+\infty$ s'il existe un réel A tel que $[A, +\infty[\subset D_f$.

(iii) On dit que f est définie au voisinage de $-\infty$ s'il existe un réel B tel que $]-\infty, B] \subset D_f$.

Par exemple la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est définie au voisinage de 0 car je peux poser $I = [0; 1]$ qui est d'intérieur non vide, qui contient 0 et f est définie sur I.

Remarque : On connait déjà la définition d'un voisinage de a. Si $a \in \mathbb{R}$ c'est un petit intervalle ouvert qui contient a c'est à dire un intervalle de la forme $]a-\varepsilon; a+\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$ qu'on n'a pas forcément envie de déclarer. On le note $V(a)$. Si $a = +\infty$ alors un voisinage de a c'est un intervalle $[A, +\infty[$ enfin si $a = -\infty$ c'est un intervalle $]-\infty, B]$. Ainsi, pour une fonction f, être définie au voisinage de a est moins contraignant quand $a \in \mathbb{R}$ qu'être définie sur un voisinage de a. Par exemple notre fonction racine carrée de x est définie au voisinage de 0 sans être définie sur $V(0)$. Par contre être définie au voisinage de $+\infty$ c'est comme être définie sur $V(+\infty)$.

2. Limites de fonctions

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f définie au voisinage de a. Soit $l \in \mathbb{R}$. Dire que la limite de $f(x)$ quand x tend vers a vaut l c'est exprimer **précisément** l'idée que si x " vaut environ " a sans être égal à a alors " $f(x)$ vaut environ l". Combien faut-il déclarer de variables pour exprimer cette idée et comment les déclare-t-on ?

Même si l'idée ci-dessus sert beaucoup dans les exercices pour les opérations de limite, quand il s'agit d'exprimer le concept il vaut mieux retenir l'assertion universelle suivante :

Pour tout voisinage $V(l)$ de la limite, il existe un voisinage $V(a)$ du point tel que pour tout x de $D_f \backslash \{a\}$

$$(x \in V(a)) \Rightarrow (f(x) \in V(l))$$

Ensuite dans la pratique on déclare les variables nécessaires pour déclarer précisément les voisinages en question avec les bons quantificateurs. Par exemple :

- être dans un voisinage de l quand $l \in \mathbb{R}$ c'est être dans un intervalle $]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$ on va donc déclarer ε si on veut parler d'un voisinage de $l \in \mathbb{R}$ et au lieu d'écrire $f(x) \in V(l)$ on écrira $|f(x)-l| < \varepsilon$ qui est équivalent à $f(x) \in]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$

- être dans un voisinage de l quand $l = +\infty$ c'est être dans un intervalle $[A, +\infty[$ on va donc déclarer $A > 0$ si on veut parler d'un voisinage de $+\infty$ et au lieu d'écrire $f(x) \in V(+\infty)$ on écrit $f(x) \geq A$ qui est équivalent à $f(x) \in [A; +\infty[$.

- être dans un voisinage de l quand $l = -\infty$ c'est être dans un intervalle $]-\infty; B]$[on va donc déclarer $B < 0$ si on veut parler d'un voisinage de $-\infty$ et au lieu d'écrire $f(x) \in V(-\infty)$ on écrit $f(x) \leq B$ qui est équivalent à $f(x) \in]-\infty; B]$.

On aboutit donc aux définitions suivantes :

Définition 6.0.2. *Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie au voisinage de a. Soit $l \in \mathbb{R}$. Alors :*
(i) On dit que la fonction f admet pour limite l en a (ou encore que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a) si et seulement si l'assertion suivante est vraie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in D_f \backslash \{a\}, (|x-a| \leq \eta) \Rightarrow (|f(x)-l| \leq \varepsilon)$$

(ii) On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en a si et seulement si l'assertion suivante est vraie :

(iii) On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en a si et seulement si l'assertion suivante est vraie :

Théorème 6.0.1. *Si f admet une limite en un point, alors elle est unique.*

3. Les outils usuels pour manipuler ou déterminer une limite

Si la limite existe elle est unique, mais encore faut-il qu'elle existe !Par exemple, la fonction partie entière n'a pas de limite en 0, les fonctions cos et sin n'ont pas de limite en $+\infty$. Quand on écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ldots$, on dit "qu'on passe à la limite" au sens où l'on passe de la formule $f(x)$ à la limite de f en a mais pour avoir le droit de passer à la limite, il faut être sûr qu'elle existe et pouvoir l'argumenter avant.

3.1 Les théorèmes d'opérations de limites usuelles

Si les opérations sur les limites usuelles de fonction ne conduisent pas à des formes indéterminées, alors ces opérations prouvent l'existence de la limite et donnent la valeur. On peut argumenter de la façon suivante : "par théorèmes d'opérations sur les limites usuelles, on trouve $\lim_{x\to a} f(x) = ...$

Les formes indéterminées à connaitre au niveau L1 sont :

$$\frac{"0"}{"0"},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ "0" \times \pm\infty,\ +\infty - \infty,\ "1"^{+\infty}.$$

Il faut également faire attention à la forme $\frac{l \neq 0}{"0"}$ qui ainsi affichée est indéterminée alors que l'on sait calculer $\frac{l \neq 0}{"0^+"}$ ou $\frac{l \neq 0}{"0^-"}$

Quand on a affaire à une forme indéterminée on essaye souvent de reformuler pour lever l'indétermination :

- Factorisation par le terme dominant au numérateur et au dominateur dans le cas de $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- Réduction de la fraction ou recours aux indéterminées usuelles dans le cas $\frac{"0"}{"0"}$
- Factorisation par le terme dominant dans le cas $+\infty - \infty$
- Expression conjuguée

Rappel des formes indéterminées usuelles :

Croissances comparées en $+\infty$

Pour tout réel $\alpha,\ \beta > 0$:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)^\alpha}{x^\beta} = +\infty},\qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{(e^x)^\alpha} = 0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0},\qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{(\ln(x))^\alpha} = +\infty}$$

Croissances comparées en 0 et en $-\infty$

Pour tout réel $\alpha,\ \beta > 0$

$$\boxed{\lim_{u\to0^+} u^\alpha(\ln(u))^\beta = 0}$$

Pour tout entier n non nul et tout réel $\beta > 0$

$$\boxed{\lim_{u\to-\infty} u^n(e^u)^\beta = 0}$$

Formes indéterminées usuelles $\frac{"0"}{"0"}$

Ce sont presque toutes des limites de taux de variation :

3.2 Autres théorèmes

Théorème 6.0.2.
Théorème des gendarmes :
1) S'il est vrai que :
(i) Sur $V(a)\backslash\{a\} \cap D_f$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
(ii) g *et* h *ont la même limite* ***finie*** l *en* a
Alors f *admet une limite en* a *et* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.
Théorème de minoration :
S'il est vrai que :
(i) Sur $V(a)\backslash\{a\} \cap D_f$, $g(x) \leq f(x)$
(ii) $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$
Alors f *admet une limite en* a *et* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.
Théorème de majoration : *:*
S'il est vrai que :
(i) Sur $V(a)\backslash\{a\} \cap D_f$, $g(x) \leq f(x)$
(ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$
Alors g *admet une limite en* a *et* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$.

Propriété 6.0.1.
Le produit d'une fonction bornée au voisinage de $a \in \bar{\mathbb{R}}$ *par une fonction qui tend vers* 0 *en* a *est une fonction qui tend vers 0 en* a.

Exemple :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sin x = 0 \text{ car } \ldots$$

Démontrer cette propriété

⚠ Il ne faut pas confondre le théorème des gendarmes, qui permet de prouver l'existence d'une limite, avec un passage à la limite dans une inégalité, où l'existence des limites est pré-requise :

Passage à la limite dans une inégalité large :

Propriété 6.0.2.
Soient f *et* g *deux fonctions définies au voisinage de* $a \in \bar{\mathbb{R}}$, a *étant éventuellement exclus. S'il est vrai que :*
(i) Sur $V(a)\backslash\{a\} \cap D_f$, $f(x) \leq g(x) \quad (\star)$
(ii) f *et* g *ont des limites* ***finies*** *respectives* l_f *et* l_g *en* a.
Alors on peut passer à la limite dans l'inégalité $(\star)$ *et on obtient* $l_f \leq l_g$.

Passage à la limite dans une inégalité stricte :

Propriété 6.0.3.
Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \bar{\mathbb{R}}$, sauf peut-être en a. S'il est vrai que :
(i) Sur $V(a)\backslash\{a\}$, $f(x) < g(x)$ $(\star)$
*(ii) f et g ont des limites **finies** respectives l_f et l_g en a.*
Alors on peut passer à la limite dans l'inégalité $(\star)$ et on obtient $l_f \leq l_g$.

⚠ Par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent larges.

3.3 Limites des fonctions monotones

Théorème 6.0.3.
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a; b[$ avec $a; b \in \bar{\mathbb{R}}$.
Si f est monotone sur $]a; b[$ (croissante ou décroissante), alors f possède toujours une limite en a et b, la limite pouvant être finie ou infinie.

Remarques :
R1 : Si f est croissante et majorée sur $]a; b[$, alors f admet une limite finie l en b et l majore f sur $]a, b[$.
R2 : Si f est croissante et minorée sur $]a; b[$, alors f admet une limite finie l en a et cette limite l minore f sur $]a, b[$.
R3 : Si f est décroissante et minorée sur $]a; b[$, alors f admet une limite finie l en b qui minore f sur $]a; b[$.
R4 : Si f est décroissante et majorée sur $]a; b[$, alors f admet une limite finie l en a et cette limite majore f.
R5 : Si f est croissante et non majorée sur $]a; b[$, alors f tend vers $+\infty$ en b.
R6 : Si f est décroissante et non minorée sur $]a; b[$ alors f tend vers $-\infty$ en b.

4. Fonction négligeable devant une autre au voisinange d'un point a

Définition 6.0.3.
Soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Soit f et g des fonctions définies au voisinage de a .
*f **est négligeable devant** g **en** a lorsqu'on peut écrire $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$, où la fonction ε est définie au voisinage de a et tend vers 0 quand x tend vers a. On écrit alors " Au voisinage de a, $f = o(g)$" qu'on lit aussi "f est un petit o de g".*

Remarque : certains préfèrent noter $f \underset{x \to a}{=} o(g)$ au lieu d'écrire "au voisinage de a". Attention à cette notation, on ne fait pas tendre x vers a comme dans une limite, rien à voir, c'est une autre façon de dire que x est au voisinage de a.

Exemples :

Propriété 6.0.4.
Soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$. *Soit* f *et* g *des fonctions définies au voisinage de* a .
Si $\frac{f}{g}$ *est définie au voisinage de* a, *alors*

$$f \underset{x\to a}{=} o(g) \text{ si et seulement si } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

On peut donc revisiter certaines formes indéterminées usuelles :

Propriété 6.0.5. ***Comparaisons usuelles***

Comparaisons entre puissances :

$$\text{(i) } 0 < \alpha < \beta \quad \Rightarrow \quad x^{\alpha} \underset{x\to+\infty}{=} o(x^{\beta})$$
$$\text{(ii) } 0 < \alpha < \beta \quad \Rightarrow \quad x^{\beta} \underset{x\to 0}{=} o(x^{\alpha})$$

Croissances comparées :

$$\text{(iii) } \forall\alpha > 0,\ \forall\beta > 0, \quad (\ln x)^{\beta} \underset{x\to+\infty}{=} o(x^{\alpha})$$
$$\text{(iv) } \forall\alpha > 0,\ \forall\beta > 0, \quad x^{\alpha} \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\beta x})$$
$$\text{(v) } \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\ln(x) = 0 \ \ i.e \ln x \underset{x\to 0^+}{=} =o(\frac{1}{x^{\alpha}})$$

Propriété 6.0.6. ***Opérations sur les "o"***

(i) $\forall\lambda \in \mathbb{R}, \lambda o(f) = o(f) = o(\lambda f)$
(ii) $o(f) + o(f) \underset{x\to a}{=} o(f)$.
Plus généralement, une somme finie de $o(f)$ *"se réduit" en un* $o(f)$, *c'est à dire que ça reste une fonction négligeable devant* f.
(iii) Si $f \underset{x\to a}{=} o(g)$ *et* $g \underset{x\to a}{=} o(h)$ *alors* $f \underset{x\to a}{=} o(h)$ *autrement dit* $o(o(h)) \underset{x\to a}{=} o(h)$.

5. Fonctions équivalentes au voisinage de a

5.1 Définition et règles de calcul

Définition 6.0.4.
Soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Soient deux fonctions f et g définies au voisinage de a. On dit que ***ces fonctions sont équivalentes en*** *a, et on note $f \underset{x \to a}{\sim} g$, lorsqu'on peut écrire au voisinage de a $f(x) = g(x)\alpha(x)$, où la fonction α tend vers 1 lorsque x tend vers a.*

Propriété 6.0.7.
- Si deux fonctions sont équivalentes en a, et si l'une des deux admet une limite $l \in \bar{\mathbb{R}}$ en a, alors l'autre admet la même limite l en a.
- Si deux fonctions sont équivalentes en a, elles sont de même signe au voisinage de a.

Un physicien résumerait cette propriété en disant que deux fonctions équivalentes en a auront "le même ordre de grandeur" en a.

Propriété 6.0.8. ***Opérations sur les équivalents***
(i) $f \underset{x \to a}{\sim} g \Longleftrightarrow f \underset{x \to a}{=} g + o(g)$ d'où l'automatisme pratique : $g + o(g) \underset{x \to a}{\sim} g$

(ii) ***Produit*** *: si $f_1 \underset{x \to a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x \to a}{\sim} g_2$ alors $f_1 f_2 \underset{x \to a}{\sim} g_1 g_2$*
(iii) ***Quotient*** *: si $f_1 \underset{x \to a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x \to a}{\sim} g_2$ alors $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{x \to a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$*
(iv) ***Puissance*** *: si $f \underset{x \to a}{\sim} g$ alors $f^n \underset{x \to a}{\sim} g^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$*
Plus généralement, si $f \underset{x \to a}{\sim} g$ et $g > 0$ au voisinage de a, alors $f^\alpha \underset{x \to a}{\sim} g^\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
(v) ***Transitivité*** *Si $f \underset{x \to a}{\sim} g$ et $g \underset{x \to a}{\sim} h$ alors $f \underset{x \to a}{\sim} h$*

⚠ L'équivalence est compatible avec la multiplication, la division, et l'élévation à une puissance fixée. En revanche, elle n'est pas compatible avec l'addition :
$x^2 \underset{x \to 0}{\sim} x^2 + x^3$ car ... et $-x^2 + x^4 \underset{x \to 0}{\sim} -x^2$ car ...
mais il n'est pas vrai que $x^4 \underset{x \to 0}{\sim} x^3$.

⚠ On ne doit jamais écrire qu'une fonction est équivalente à zéro en a, sauf si elle est nulle sur tout un voisinage de a ce qui est exceptionnel. Si en calculant on finit par trouver $f \underset{x \to a}{\sim} 0$ c'est que les calculs sont très probablement faux ...

⚠ On peut utiliser la transitivité pour les équivalents mais on ne doit pas composer sur un équivalent. Par exemple si je sais que $f \underset{x \to a}{\sim} g$ je ne peux pas en déduire $e^f \underset{x \to a}{\sim} e^g$.

5.2 Équivalents usuels

Propriété 6.0.9.
Soit f et g définies au voisinage de a. Si $\dfrac{f}{g}$ est définie au voisinage de a, alors :

$$f \underset{x \to a}{\sim} g \text{ si et seulement si } \lim_{x \to a} \frac{f}{g} = 1$$

Propriété 6.0.10.

(i) Si $\lim_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ *non nul, alors* $f \underset{x\to a}{\sim} l$

(ii) $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim}$

(iii) $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim}$

(iv) Pour α *fixé réel.* $(1+u)^\alpha - 1 \underset{u\to 0}{\sim}$

(v) $\ln(v) \underset{v\in V(1)}{\sim} v - 1$

(v) $\sin u \underset{u\to 0}{\sim}$

(vi) $\tan u \underset{u\to 0}{\sim}$

(vii) $\arctan u \underset{u\to 0}{\sim}$

(viii) $1 - \cos u \underset{u\to 0}{\sim}$

(ix) Un polynôme est équivalent en + ou - l'infini à son monôme de plus haut degré.
(x) Un polynôme est équivalent en 0 à son monôme de plus petit degré (éventuellement constant)

Propriété 6.0.11.

(i) Si $u(x)$ *tend vers 0 en* $a \in \bar{\mathbb{R}}$*, alors* $e^u - 1 \underset{x\to a}{\sim} u$

(ii) Si $u(x)$ *tend vers 0 en* $a \in \bar{\mathbb{R}}$*, alors* $\ln(1+u) \underset{x\to a}{\sim} u$

(iii) Si $u(x)$ *tend vers 0 en* $a \in \bar{\mathbb{R}}$*, alors* $(1+u)^\alpha - 1 \underset{x\to a}{\sim} \alpha u$

(iv) Si $u(x)$ *tend vers 0 en* $a \in \bar{\mathbb{R}}$*, alors* $\sin u \underset{x\to a}{\sim} u$

(v) Si $u(x)$ *tend vers 0 en* $a \in \bar{\mathbb{R}}$*, alors* $\tan u \underset{x\to a}{\sim} u$

(vi) Si $u(x)$ *tend vers 0 en* $a \in \bar{\mathbb{R}}$*, alors* $\arctan u \underset{x\to a}{\sim} u$

(vii) Si $u(x)$ *tend vers 0 en* $a \in \bar{\mathbb{R}}$*, alors* $1 - \cos u \underset{x\to a}{\sim} \frac{1}{2}u^2$

Chapitre 7

Prolongement de fonctions

1. Restriction et prolongement

Définition 7.0.1.
Soit φ une application (ou une fonction) définie sur un domaine D qui n'est pas $\mathbb{R}$ tout entier.
(i) On appelle prolongement de φ toute fonction f égale à φ sur D mais défini sur un domaine strictement plus grand que D.
(ii) Soit $a \in \mathbb{R} \backslash D$. On parle de prolongement de φ en a pour une fonction f égale à φ sur D qui sera définie en a alors que φ ne l'est pas.
(iii) Soit $a \in \mathbb{R} \backslash D$. On parle de prolongement par continuité de φ en a pour un prolongement de φ en a continu en a.

Exemple :
Soit $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $\begin{array}{rccl} \varphi: & [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

On observe que l'application φ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et que f est un prolongement de φ, plus précisément c'est un prolongement de φ sur $\mathbb{R}$.

On peut aussi dire que φ est une restriction de f parce qu'elle est définie et égale à f sur un ensemble plus petit. On la note $\varphi = f|_{[0;+\infty[}$.

Posons à présent $\varphi(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & si\ x \neq 0 \\ 12 & si\ x = 0 \end{cases}$;

On observe ici aussi que φ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, il manque 0, et que $f = \varphi$ sur $\mathbb{R}^*$ mais qu'elle est définie en 0 alors que φ ne l'est pas. Ainsi f est un prolongement de φ en 0 et φ est la restriction de f sur $\mathbb{R}^*$.

2. Continuité d'un prolongement

Quand on prolonge **une fonction** définie au voisinage de a mais pas en a il faut toujours étudier la continuité en a d'un tel prolongement.

Théorème 7.0.1.
Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit φ une fonction définie au voisinage de a mais pas en a.
Un prolongement f de φ en a est continu en a si et seulement si φ a une limite finie l en a et $f(a) = l$.

Corollaire

i) Si f n'a pas de limite finie en a il n'existe pas de prolongement par continuité de f en a.
(ii) Si f a une limite finie l en a alors pour définir un prolongement par continuité $\hat{f}$ de f en a on posera $\hat{f}(a) = l$.

Exemple :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & si\ x \neq 0 \\ 12 & si\ x = 0 \end{cases} \quad ; \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

3. Dérivabilité d'un prolongement

Quand une fonction f est le prolongement par continuité en a d'une fonction φ définie au voisinage de a mais pas en a, on étudie son taux de variation en a pour savoir si elle est dérivable ou pas en a. Même si elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, il se peut que la fonction dérivée ne soit pas continue en a. C'est la notion de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 7.0.2.
(i) Une fonction numérique f définie sur un intervalle I est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si et seulement si elle est dérivable sur cet intervalle et si sa dérivée f' est continue sur cet intervalle.
On note $f \in \mathcal{C}^1(I)$.

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une fonction numérique f définie sur un intervalle I est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si et seulement si elle est n fois dérivable sur cet intervalle et si sa dérivée $n-ime$ notée f^n est continue sur I.
On note $f \in \mathcal{C}^n(I)$.

(iii) Une fonction numérique f définie sur un intervalle I est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si et seulement si elle est indéfiniment dérivable sur I.
On note $f \in \mathcal{C}^n(I)$.

Théorème 7.0.2.
Les fonctions $\exp, \ln, \sin, \cos, \arctan, \tan, x \mapsto x^n$ *avec* $n \in \mathbb{Z}$ *sont de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur leur(s) intervalle(s) de définition.*
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]0; +\infty[$ *tout comme* $x \mapsto x^{1/2n}$
La somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur le(s) intervalle(s) de définition.*

Chapitre 8

Suites numériques

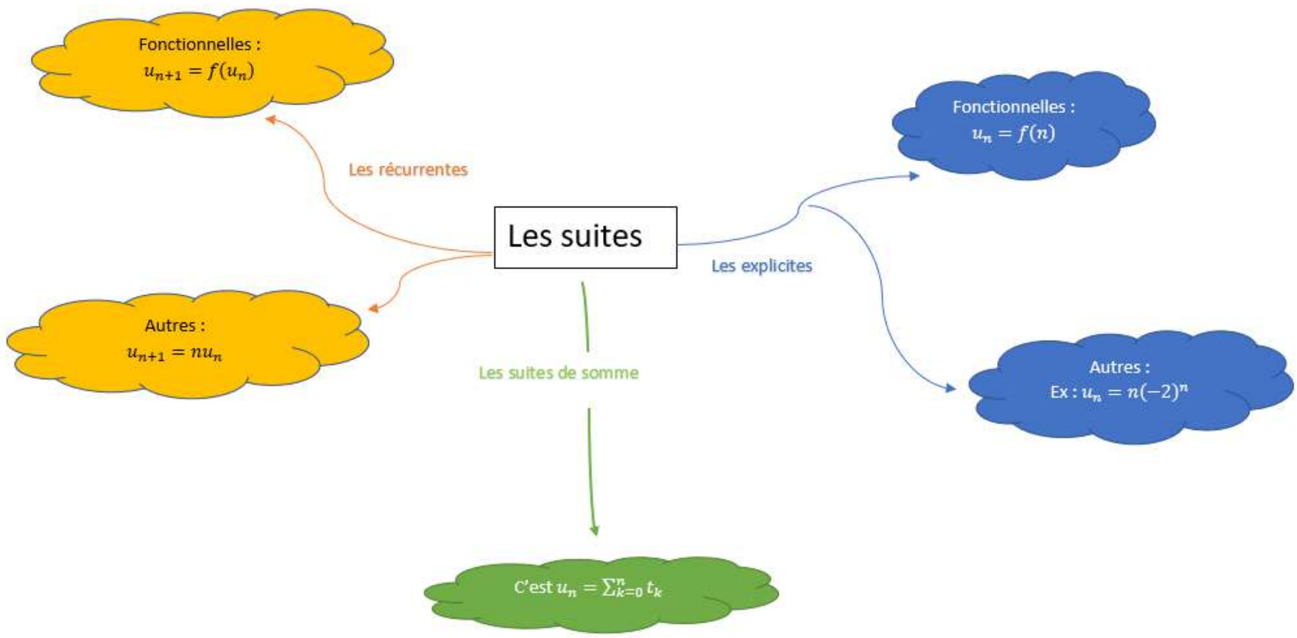
Généralités

Une suite numérique est une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, $n \mapsto u(n)$.

Plutôt que d'écrire $u(n)$ on préfère écrire u_n et au lieu d'écrire u comme une application on écrit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Observer les valeurs d'une suite, c'est donc observer l'ensemble $\{u_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$. C'est un ensemble paramétré par n qui peut être infini ou pas, par exemple :

1) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$. Alors $\{u_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\} = \{-1; 1\}$
2) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 12$. Alors $\{u_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\} = \{12\}$
3) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n$. Alors $\{u_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\} = 2\mathbb{N}$

Même si une suite numérique est une application au sens ou elle "envoie" un entier n sur un nombre réel u_n, la formulation de $u(n)$ peut se faire de différentes façons, voici quelques exemples :



Les concepts vus au lycée doivent désormais s'écrire rigoureusement avec la langage math, la plupart sont des booléens universels ou existentiels.

Définition 8.0.1.
On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est :*
(i) ***croissante*** *si et seulement si le booléen universel "* $\forall n\in [[n_0;+\infty[[,\ u_n\leq u_{n+1}$ *" est vrai.*
(ii) ***décroissante*** *si et seulement si le booléen universel "* $\forall n\in [[n_0;+\infty[[,\ u_n\geq u_{n+1}$ *" est vrai.*
(iii) ***monotone*** *si et seulement si elle est croissante ou décroissante*
(iv) ***constante*** *si et seulement si le booléen universel "* $\forall n\in [[n_0;+\infty[[, u_n=u_{n_0}$ *" est vrai.*
(v) ***stationnaire*** *si et seulement si le booléen existentiel suivant est vrai :*

$$''\ \exists N\in [[n_0;+\infty[[\ |\ \forall n\in\mathbb{N}, ((n\geq N)\Rightarrow (u_n=u_N))\ ''$$

(vi) ***croissante à partir d'un certain rang*** *si et seulement si le booléen existentiel suivant est vrai :*

$$''\ \exists N\in [[n_0;+\infty[[\ |\ \forall n\in\mathbb{N}, ((n\geq N)\Rightarrow (u_n\leq u_{n+1}))\ ''$$

(vii) ***décroissante à partir d'un certain rang*** *si et seulement si le booléen existentiel suivant est vrai :*

$$''\ \exists N\in [[n_0;+\infty[[\ |\ \forall n\in\mathbb{N}, ((n\geq N)\Rightarrow (u_n\geq u_{n+1}))\ ''$$

(viii) ***majorée*** *si et seulement si le booléen existentiel suivant est vrai :*

$$''\ \exists M\in\mathbb{R}\ |\ \forall n\in [[n_0;+\infty[[, u_n\leq M\,''$$

Un tel réel M *est alors appelé un majorant de la suite, il est fixe puisque déclaré avant la variable* n *dans la phrase mathématique.*
(ix) ***minorée*** *si et seulement si le booléen existentiel suivant est vrai :*

$$''\ \exists m\in\mathbb{R}\ |\ \forall n\in [[n_0;+\infty[[, u_n\geq m\,''$$

Un tel réel m *est alors appelé un minorant de la suite, il est fixe puisque déclaré avant la variable* n *dans la phrase mathématique.*
(x) ***bornée*** *si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée c'est à dire si et seulement si le booléen existentiel suivant est vrai :*

$$''\ \exists \alpha\in\mathbb{R}\ |\ \forall n\in [[n_0;+\infty[[, |u_n|\leq \alpha\,''$$

Remarque importante :

Quand on a une comparaison du type : "$\forall n\in\mathbb{N},\ v_n\leq u_n$,on peut dire que la suite (u_n) est minorée par la suite (v_n) ce qui ne permet pas de dire que la suite (u_n) est minorée car dans la définition de minorée il est nécessaire d'avoir une constante !

Idem pour une suite majorée par une autre suite.

Par exemple, si on sait que "$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n}\leq u_n$" alors on pourra dire que la suite des $1/n$ minore (u_n) mais pour prouver que (u_n) est minorée il faudra par exemple préciser "donc (u_n) est minorée par 0."

Définition 8.0.2.
On appelle suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de la forme* $(u_{\varphi(n)_{n\in\mathbb{N}}})$ *où* φ *est une application strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$.

Exemples : $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle la suite extraite de (u_n) des indices pairs, on trouve aussi $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}})$ la suite extraite de (u_n) des indices impairs, mais aussi (u_{3n}) etc ...

Limites de suites réelles

Définition 8.0.3.
(i) On dit que ***la suite*** (u_n) ***converge*** *quand il existe un réel* l *tel que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$:

$$\exists l \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N) \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

(ii) On dit que la suite (u_n) *diverge vers* $+\infty$ *quand* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N) \Rightarrow u_n \geq M$$

(iii) On dit que la suite (u_n) *diverge vers* $-\infty$ *quand* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

$$\forall m \in \mathbb{R}^- \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N) \Rightarrow u_n \leq m$$

(iv) On dit que la suite (u_n) *diverge quand elle n'a pas de limite, ni finie ni infinie (comme par exemple la suite* $u_n = (-1)^n$ *)*

2

Théorème 8.0.1.
(i) Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge alors sa limite* l *est unique.*
(ii) Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge alors elle est bornée.*
(iii) Si une suite (u_n) *diverge vers* $+\infty$ *alors elle n'est pas majorée.*
(iv) Si une suite (u_n) *diverge vers* $-\infty$ *alors elle n'est pas minorée.*

Les outils pour étudier l'éventuelle limite d'une suite (existence et valeur)

Suites usuelles, opérations sur les limites, comparaison

Ces outils sont particulièrement adaptés aux suites explicites mais pas uniquement.

On rappelle que les formes indéterminées sont : $\dfrac{"0"}{"0"}$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\infty - \infty$, $"0". \pm\infty$, $"1"^{+\infty}$, en cas de forme indéterminée on cherchera donc souvent à reformuler pour lever l'indétermination.

Puissances usuelles : Pour $\alpha < 0$ on aura $\lim n^\alpha = 0$,
pour $\alpha > 0$ on aura $\lim n^\alpha = +\infty$

Suites géométriques usuelles : Pour $|a| < 1$ on aura $\lim a^n = 0$,
pour $a > 1$ on aura $\lim a^n = +\infty$.
pour $a \leq -1$ la suite géométrique (a^n) diverge.

"1"$^{+\infty}$ usuel :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Comparaison usuelles entre des infinis :

$$1)\ \forall \alpha > 0,\ \forall \beta > 0, n^\alpha \underset{n \to +\infty}{=} o(e^{\beta n})$$

$$2)\ \text{Pour } \alpha > 0 \text{ et } a > 1, n^\alpha = o(a^n)$$

$$3)\ \text{Pour } a > 1, a^n = o(n!).$$

$$4)\ \forall \alpha > 0,\ \forall \beta > 0, (\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$$

Utiliser les équivalents usuels :

Quand (u_n) converge vers 0, on peut affirmer $\sin(u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$.

Quand (u_n) converge vers 0, on peut affirmer $\ln(1 + u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$.

etc ....

Se ramener à zéro

Propriété 8.0.1.
Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l si et seulement si la suite $(|u_n - l|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. En particulier :

$$\lim u_n = 0 \Longleftrightarrow \lim |u_n| = 0$$

Utiliser une potentielle monotonie

C'est un outil qu'on utilise essentiellement pour les suites récurrentes.

Théorème 8.0.2. *Théorèmes de convergence monotone*

(i) Soit (u_n) une suite croissante. Alors elle converge si et seulement si elle est majorée. Par ailleurs, si elle n'est pas majorée c'est qu'elle diverge vers $+\infty$.

(ii) Soit (u_n) une suite décroissante. Alors elle converge si et seulement si elle est minorée. Par ailleurs, si elle n'est pas minorée c'est qu'elle diverge vers $-\infty$.

Utiliser les suites extraites

Théorème 8.0.3.
(i) Si les suites extraites de (u_n) d'indices pairs et impairs convergent vers une même limite, alors la suite (u_n) converge elle-aussi vers cette limite.

(ii) Si une suite (u_n) est convergente alors toute suite extraite de (u_n) est convergente de même limite. On en déduit que si une suite (u_n) admet deux suites extraites qui convergent vers deux limites différentes, alors (u_n) n'admet pas de limite.

Théorème des gendarmes

Théorème 8.0.4.
Soit (u_n), (a_n) et (b_n) trois suites telles que :
(i) A partir d'un certain rang : $a_n \leq u_n \leq b_n$
(ii) (a_n) et (b_n) convergent toutes les deux vers la même limite l.
Alors la suite (u_n) converge elle aussi vers l.

Corollaire : Un produit bien pratique ..

Propriété 8.0.2.
Le produit d'une suite bornée par une suite convergente vers 0 est aussi une suite qui converge vers 0.

Les théorèmes de comparaison d'une suite avec une autre suite

Théorème 8.0.5. *Théorème de majoration d'une suite par une autre*
Soit (u_n) et (a_n) deux suites telles que :
(i) A partir d'un certain rang : $a_n \leq u_n$
(ii) $\lim a_n = +\infty$
Alors (u_n) diverge elle aussi vers $+\infty$.

Attention, ces théorèmes où l'on compare une suite avec une autre ne doivent pas être confondus avec un passage à la limite dans une inégalité :

Théorème 8.0.6. *Passage à la limite*
Soient (u_n) et (v_n) deux suites. S'il est vrai que :
(i) A partir d'un certain rang, $u_n < v_n$ (ou $u_n \leq v_n$)
(ii) (u_n) et (v_n) convergent

$$\text{Alors } \lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Le théorème de passage à la limite ne permet pas de prouver qu'une limite existe contrairement aux théorèmes de comparaison cités avant.

Supposer que la limite existe

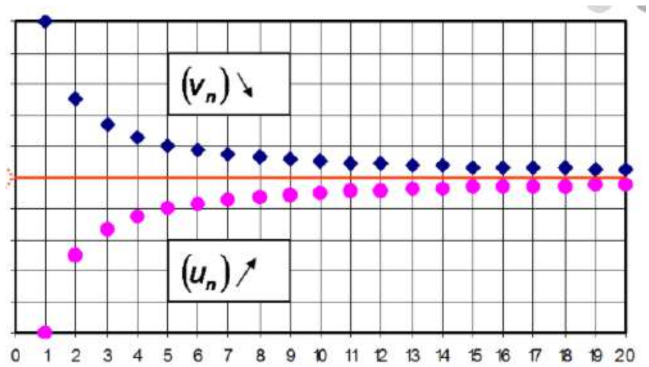
C'est un outil qu'on utilise surtout avec les suites récurrentes associé au passage à la limite dans des égalités ou inégalités, il permet de se donner une idée des valeurs d'une potentielle limite voire parfois de prouver par l'absurde que la suite ne peut pas être convergente.

Les suites adjacentes

Définition 8.0.4. *Deux suites sont dites adjacentes quand :*
(i) L'une d'elle est croissante
(ii) L'autre est décroissante
(iii) La différence des deux est une suite qui converge vers 0.

Quand deux suites sont adjacentes, leur représentation graphique a l'allure suivante :

Figure 8.1 – Suites adjacentes dessinées dans le plan



Théorème 8.0.7.
Soit (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes avec (u_n) qui désigne celle qui est croissante. Alors :
1) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$.
2) Les deux suites sont convergentes de même limite l et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq l \leq v_n$$

Suite de nombres complexes

Définition 8.0.5.
Soit une suite (z_n) de nombres complexes, on dit que la suite converge vers $z \in \mathbb{C}$ quand elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ |z_n - z| < \varepsilon$$

Propriété 8.0.3.
Soit $z \in \mathbb{C}$.
La suite (z_n) *converge vers* z *si et seulement si la suite* $(\mathcal{R}e(z_n))$ *converge vers* $\mathcal{R}e(z)$ *et la suite* $(\mathcal{I}m(z_n))$ *converge vers* $\mathcal{I}m(z)$

Remarque : comme un complexe n'a pas de signe, les théorèmes de convergence monotone ne s'appliquent pas sur (z_n), pas plus que le théorème des gendarmes.