Université de Poitiers
L1 IM - Logique et ensembles
UFR Sciences fondamentales et appliquées

Année 2024 - 2025

Laurence DI POI

Table des matières

Chapitre 1

Booléens, variables, quantificateurs.

1.1 Les booléens (ou assertions)

1.1.1 Introduction rapide

Voici des énoncés d'exercices :

Exo 1 : " Soit $f(x) = x^{12} - 3x + 5$. Calculer la dérivée de la fonction f. "

Exo 2 : " Déterminer l'équation de la droite du plan qui passe par $A(-1; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3; 4)$. "

Exo 3 : Montrer que " Pour tout x réel, $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$. "

Dans les deux premiers énoncés, ce que l'on demande explicitement c'est de faire des calculs alors que le troisième énoncé demande de montrer que l'égalité $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$ **est vraie** tout le temps.

Cette phrase mathématique : " Pour tout x réel, $x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$. " s'appelle un booléen parce qu'on peut lui attribuer une valeur de vérité VRAI ou FAUX. la phrase " Soit $f(x) = x^{12} - 3x + 5$ " n'est pas un booléen, c'est une façon de déclarer la fonction $f(x)$. De même la phrase " Calculer la dérivée de la fonction f. " n'est pas un booléen car on ne peut pas lui attribuer de valeur VRAI ou FAUX, cela n'aurait pas de sens.

1.1.2 Booléens, assertions.

Définition 1.1.1. *En logique, un booléen est une phrase à laquelle on peut attribuer une valeur de vérité : vrai ou faux.*
Un booléen a donc l'apparence d'une affirmation bien rédigée mais qui peut néanmoins être fausse.

■ **Test de compréhension du cours (corrigé sur le site)** : **Les phrases suivantes sont-elles des booléens et si oui quelle est leur valeur de vérité ?**

1) π est un nombre décimal.
2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $x^2 - 12 \geq 0$.
3) Pour chaque valeur x de $\mathbb{R}$, on a $x^2 - 12 \geq 0$.
4) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\sqrt{x^2 - 4} \geq 0$.

Remarque : en mathématiques, on préfère utiliser le mot assertion ou proposition au lieu de dire booléen, et on dit que "l'assertion est vérifiée" au lieu de dire "le booléen a la valeur vrai". De même on préfère dire "la proposition n'est pas vérifiée" au lieu de dire "le booléen est faux".

Faire un programme en informatique c'est être capable d'enchainer une succession de commandes bien choisies dans un certain langage. Faire une démonstration en math, c'est être capable d'enchainer **dans le bon ordre en justifiant** une succession de booléens VRAIS **bien connectés entre eux**.

1.1.3 Booléens usuels.

Parmi les booléens usuels il y a **les booléens de comparaison** à savoir :

$$" =, \neq, \leq, \geq, <, > "$$

Par exemple "$\pi < 0$" est un booléen de comparaison qui est faux, en revanche " $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ " est un booléen de comparaison qui est vrai.

Les booléens d'appartenance ou d'inclusion sont eux aussi très usuels :

$$" \in, \notin, \subset, \not\subset "$$

Par exemple $\dfrac{1}{12} \in \mathbb{N}$ est un booléen d'appartenance faux.

Dans ce chapitre, on découvrira aussi **les booléens existentiels et les booléens universels** qui sont extrêmement usuels en mathématiques.

■ **Test de compréhension du cours (corrigé sur le site)** : **Vrai, faux ou mal rédigé ?**

1) " $x^2 \geq 0$ " est un booléen de comparaison toujours vrai.
2) " Soit $x \in \mathbb{R}$ " est un booléen d'appartenance.
3) " Soit $x \in \mathbb{Z}$, alors $x \in \mathbb{R}$ ". Dans cette phrase il y a un seul booléen d'appartenance qui est toujours vrai.
4) "$\dfrac{1}{\sqrt{15}-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{12}$" est un booléen de comparaison vrai.

1.2 Variable formelle, variable affectée.

Pour écrire des mathématiques, on a besoin de variables. Chaque variable qu'on souhaite utiliser dans une démonstration doit être déclarée, même celles qui figurent dans les énoncés doivent être présentées clairement dans votre copie, en math une façon de déclarer des objets mathématiques est d'utiliser le mot soit.

Par exemple la phrase " Soit $x \in \mathbb{R}$." C'est une phrase qui sert à **déclarer** la variable x, c'est à dire la présenter de façon à pouvoir l'utiliser pour exprimer une idée (qui va souvent être un booléen), à la façon d'un programme car une fois déclarée ainsi chaque occurrence de x fera référence à cette déclaration initiale sauf si on redéclare cette variable dans le cadre d'une nouvelle idée.

On peut déclarer une variable juste en la baptisant et en donnant son type, c'est à dire l'ensemble auquel elle appartient, par exemple "Soit $n \in \mathbb{N}$". On dit alors que la variable est **formelle**. Tout ce qu'on raconte sur cette variable est alors vrai pour toutes les valeurs de son ensemble.

On peut aussi déclarer une variable en l'affectant c'est à dire en lui attribuant une valeur numérique "Soit $x = 12$" ou une valeur exprimée grâce à une autre variable précédemment déclarée "Soit $y \in \mathbb{R}$. Soit $x = y^2 + 12$". Dans cet exemple la variable y est formelle mais la variable x est **affectée**, elle dépend de y et vous devez comprendre qu'il faut les déclarer dans le bon ordre c'est à dire y en premier puis x.

On peut déclarer tout ce que l'on veut y compris des booléens mais on utilise alors " :" au lieu de "=". Par exemple :

"Soit $P \ : \ \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$." La lettre P est déclarée comme étant le booléen d'appartenance $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, elle est donc affectée et on sait même que P a la valeur FAUX.

"Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $A(x) \ : \ (x-3)(x-12) > 0$ ".

La lettre x est déclarée de façon formelle (sans affectation) et le booléen de comparaison "$(x-3)(x-12) > 0$ a été nommé $A(x)$ car sa valeur VRAI ou FAUX dépend de la valeur du x formel fixé avant, d'où le choix du nom $A(x)$ au lieu de A. C'est un booléen affecté même s'il dépend de la variable x. Il prend la valeur VRAI si $x \notin]3;12[$ et FAUX si $x \in [3;12]$.

■ Exercice corrigé (correction en vidéo sur le site)

a) Déclarer une variable non affectée de $\mathbb{Z}$.

b) Déclarer une variable formelle de $\mathbb{Z}$.

c) Déclarer une variable affectée de $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ qui n'est pas dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

d) Déclarer de deux façons différentes une variable formelle de $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.

e) Déclarer le booléen " $-\sqrt{x-3} < x+4$". Quelle est sa valeur ?

f) Déclarer le booléen " $\sqrt{x} \leq x-2$ ". Quelle est sa valeur quand $x = 1$? Quelle est sa valeur quand $x = 4$?

1.3 Négation d'un booléen.

Propriété 1.3.1. *Soit un booléen A (formel), alors on peut définir un autre booléen appelé non(A) et noté $\neg A$ qui est vrai si et seulement si A est faux.*

On dit que le "non" est un connecteur logique parce qu'il permet de créer un nouveau booléen.

Voici la table de vérité du "NON" avec FAUX et VRAI qui sont représentés respectivement par 0 et 1. :

A	$\neg A$
0	1
1	0

Voici les négations des booléens usuels de comparaison et d'appartenance

A	$=$	$<$	$\in$	$\leq$	$\subset$
$\neg A$	$\neq$	$\geq$	$\notin$	$>$	$\not\subset$

■ Exercice corrigé (correction en vidéo)

Écrire les négations des booléens présents dans les phrases suivantes :

a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $A(x) \ : \ 2x+3 > x^2$.

b) Soit $(a,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ et $B(a,n) \ : \ (1+a)^n \geq 1+na$.

c) Soit $\varepsilon > 0$, soit $x \in \mathbb{R}$ et $P(\varepsilon, x) \ : 12 - \varepsilon < x < 12 + \varepsilon$.

d) Soit $A \ : \ (-5, 12) \in \mathbb{N}^2$.

1.4 Les quantificateurs

Il y en a deux :

1.4.1 Le quantificateur universel.

Le quantificateur $\forall$, appelé **quantificateur universel**, est utilisé pour exprimer une information qui concerne tous les objets d'un ensemble E sans exception. Il peut se lire de plusieurs manières :

$$\textbf{Ex 1 :} \ \forall x \in \mathbb{R}, \ x^2 + 12 \geq 0$$

- "Pour chaque affectation de x dans $\mathbb{R}$, on a $x^2 + 12 \geq 0$" ou plus rapidement "pour chaque x dans $\mathbb{R}$, on a $x^2 + 12 \geq 0$".
- "Quel que soit l'affectation de x dans $\mathbb{R}$, on a $x^2 + 12 \geq 0$" ou plus rapidement "Quel que soit x dans $\mathbb{R}$, on a $x^2 + 12 \geq 0$".
- "Pour toute affectation de x dans $\mathbb{R}$, on a $x^2 + 12 \geq 0$" ou plus rapidement "Pour tout x dan $\mathbb{R}$, on a $x^2 + 12 \geq 0$".

Cette phrase est un booléen avec la valeur VRAIE car n'importe quelle affection réelle de x donnera $x^2 \geq 0$ et à fortiori $x^2 + 12 \geq 0$, on dit que c'est un booléen universel parce que dès le début de l'écriture on utilise le quantificateur $\forall$ qui annonce une généralité.

Dans ce booléen il y a un découpage. La première partie de la phrase "$\forall x \in \mathbb{R}$" sert à déclarer la variable x, la seconde partie $x^2 + 12 \geq 0$ est un booléen qui dépend du x déclaré juste avant. Il peut être utile parfois de déclarer ces deux booléens bien distinctement, on peut utiliser la présentation suivante qui a l'avantage d'être rapide et d'afficher le découpage :

Soit $A \ : \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \underbrace{x^2 + 12 \geq 0}_{A(x)}$.

Il faut alors comprendre que A et $A(x)$ sont deux booléens différents. Le booléen universel A prend la valeur vraie uniquement quand $A(x)$ est vrai tout le temps, si le booléen $A(x)$ prend serait-ce qu'une fois la valeur faux alors A sera faux.

$$\textbf{Ex 2 :} \ \forall x \in \mathbb{R}, \ x^2 - 4 \geq 0$$

Déclarons les booléens en affichant le découpage :

Soit $B \ : \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \underbrace{x^2 - 4 \geq 0}_{B(x)}$"

Le booléen $B(1)$ est faux car $1^2 - 4 < 0$. Ainsi le booléen universel B est faux.

Bilan rapide :
Un booléen universel peut s'afficher avec un découpage

$$" \ A \ : \ \forall x \in E, \ A(x) \ "$$

Le booléen universel A est vrai si et seulement si le booléen $A(x)$ est tout le temps vrai.
Le booléen A est faux dès qu'il existe au moins une affectation d'un x de E pour laquelle $A(x)$ faux.

1.4.2 Le quantificateur existentiel.

Le quantificateur $\exists$ est utilisé pour exprimer l'existence, la possibilité de déclarer un élément bien choisi dans un ensemble précisé :

$$\textbf{Ex 3 :} \ \exists x \in \mathbb{N}, 12 = 2x$$

Plusieurs lectures sont possibles ici aussi :
- " Il existe une affectation de x dans $\mathbb{N}$ tel que $12 = 2x$ " ou plus rapidement " il existe x dans $\mathbb{N}$ tel que $12 = 2x$ ".
- Il est possible de déclarer x dans $\mathbb{N}$ tel que $12 = 2x$.

Cette phrase est un booléen avec la valeur VRAI car si je déclare $x = 6$ qui est bien un entier naturel alors $12 = 2x$ est vrai, on dit que c'est un booléen existentiel parce que dès le début de l'écriture on utilise le quantificateur $\exists$ qui annonce une condition d'existence.

Dans ce booléen il y a de nouveau un découpage. La première partie de la phrase "$\exists x \in \mathbb{R}$" sert à déclarer la variable x, la seconde partie $12 = 2x$ est un booléen qui dépend du x déclaré juste avant et on peut ici aussi afficher le découpage en déclarant avec deux noms différents et bien choisis nos booléens :

Soit $A \ : \ \exists x \in \mathbb{N}, \ \underbrace{12 = 2x}_{A(x)}$.

On a bien compris que A et $A(x)$ sont deux booléens différents. Le booléen existentiel A prend la valeur vraie dès que $A(x)$ est vrai ne serait ce qu'une fois, et ce booléen existentiel A prendra la valeur faux uniquement quand $A(x)$ est faux tout le temps.

Bilan rapide :
Un booléen existentiel peut s'afficher avec un découpage

$$" \ A \ : \ \exists x \in E, \ A(x) \ "$$

Le booléen existentiel A est vrai si et seulement si le booléen $A(x)$ est vraie pour au moins une affectation d'un x de E

Remarque : on a une notation $\exists!$ qui en plus de l'existence affirme l'unicité.

$$\textbf{Ex 4 :} \ \exists! x \in \mathbb{N}, 12 = 2x$$

Il existe une unique affectation de x dans $\mathbb{N}$ telle que $12 = 2x$.

Les booléens utilisent souvent les deux symboles avec plusieurs variables, attention à l'ordre car les symboles $\forall$ et $\exists$ ne commutent pas, en changeant l'ordre on change l'information.

Ex 5 : Le booléen existentiel " $A \ : \ \exists y \in \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 = y^2$ " n'a pas le même sens que le booléen universel : " $B \ : \ \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 = y^2$ ". En effet on démontrera que A est faux tandis que B est vrai.

Phrases mathématiques usuelles :

(i) Savoir écrire avec des quantificateurs qu'un réel x préalablement déclaré est rationnel : booléen existentiel.

$$"\exists (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, x = \frac{a}{b}"$$

(ii) Savoir écrire qu'une suite (u_n) est majorée par un réel M : booléen universel (la majoration doit être valable pour tous les termes de la suite donc pour tous les indices)

$$"\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M"$$

(iii) Savoir écrire qu'une suite (u_n) est majorée : booléen existentiel.

$$"\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M"$$

(iv) On a des phrases similaires pour la notion de minoration.

De façon similaire aussi, on doit savoir écrire avec des quantificateurs qu'une fonction est majorée sur un intervalle I déclaré :

$$"\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M"$$

■ **Exercice corrigé (correction en vidéo)**

Écrire les énoncés usuels suivants à l'aide de quantificateurs sans chercher à justifier s'ils sont vrais ou faux :

(1) $\sqrt{2}$ est rationnel.
(2) La fonction cosinus est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$.
(3) La fonction carrée est minorée par 12 sur $[4; +\infty[$.
(4) La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est majorée par 3.

■ **Exercice corrigé (correction en vidéo)**

Écrire les énoncés suivants à l'aide de quantificateurs sans chercher à justifier s'ils sont vrais ou faux :

(1) Le carré de tout réel est positif ou nul.
(2) Il existe des réels qui sont strictement supérieurs à leur carré.
(3) Aucun entier relatif n'est supérieur à tous les autres.
(4) Les réels ne sont pas tous des quotients d'entiers naturels.
(5) Aucun réel n'est un quotient d'entiers relatifs.
(6) Il existe un réel dont la somme avec n'importe quel autre réel est toujours strictement positive.
(7) Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.
(8) Étant donné trois réels non nuls, il y en a au moins deux de même signe.
(9) Pour chaque réel, on peut trouver un réel tel que la somme des deux soit strictement positive.

1.4.3 Négation des booléens quantifiés.

Propriété 1.4.1. *Soit E un ensemble, et $A(u)$ une assertion sur une variable u de E.*

(i) Étant donné un booléen universel A avec la structure "$\forall u \in E, A(u)$" la négation de A est le booléen $\neg A \ : \ \exists u \in E, \ \neg A(u)$

(ii) Étant donné un booléen existentiel A avec la structure "$\exists u \in E, A(u)$" la négation de A est le booléen $\neg A \ : \ \forall u \in E, \ \neg A(u)$

Ex 1 : Soit $A \ : \ \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ alors $\neg A \ : \ \exists x \in \mathbb{R}, \ x^2 < 0$

Ex 2 : Soit $A \ : \ \exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 12 = 0$ alors $\neg A \ : \ \forall x \in \mathbb{R}, \ x^2 + 12 \neq 0$

■ **Exercice corrigé (correction en vidéo)**

Écrire avec des quantificateurs la négation des booléens suivants :

(1) $\forall x \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}$
(2) $\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \sqrt{2} \neq \dfrac{a}{b}$
(3) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m$ divise n
(4) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m$ divise n
(5) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n$ divise m
(6) $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, |\cos(x)| \leq M$
(7) $\sqrt{2}$ est rationnel.
(8) La fonction sinus est majorée par $\dfrac{1}{12}$ sur $\mathbb{R}$.
(9) La fonction cosinus est minorée par 0 sur $\mathbb{R}$.

1.5 Variables muettes (liées) ou parlantes (libres).

1.5.1 Variables muettes

Hormis le traditionnel "Soit ....", il existe d'autres façons de déclarer des variables.

Ex 1 : $\displaystyle\int_0^2 2x dx = 4$

C'est le symbole $\int_0^2 ...dx$ qui déclare la variable x et nous indique son appartenance à l'ensemble $[0; 2]$.

On voit que dans le résultat final il n'y a pas la variable x, on dit que x est une **variable muette pour cette intégrale**, ça veut dire que l'intégrale ne dépend pas de x. Le symbole $\int_0^2 ...dx$ qui a permis de déclarer x est qualifié de **symbole mutificateur.**

Les symboles mutificateurs sont nombreux en math : les limites, le symbole $\sum$ pour les sommes, **les quantificateurs** $\forall$ et $\exists$, les notations ensemblistes ..., etc ...

Par exemple, si on considère le booléen $A\ :\ \forall x \in [-1, 1]\ x^2 \leq 1$ la variable x est muette pour ce booléen à cause du symbole mutificateur $\forall$.

Quand une variable est muette pour un objet mathématiques c'est que la valeur de cet objet ne dépend pas d'elle, on peut alors changer le nom de la variable et avoir la même information :

Ex 2 : $\displaystyle\int_0^2 2x dx = \int_0^2 2y\ dy$

Ex 3 : $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ a le même sens que $\lim_{y \to +\infty} e^{-y} = 0$.

En général, une variable muette a un "espace de vie" restreint.

Ex 4 : $\forall x \in [-1, 1], \exists \theta \in \mathbb{R},\ \cos\theta = x$
$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 12 \geq 0$
Ces deux booléens universels utilisent un même nom de variable (à savoir x) et pourtant il ne s'agit pas "du même x".

1.5.2 Variable parlante

Soit $A\ :\ \forall x \in [-1, 1]\ \underbrace{x^2 \leq 1}_{A(x)}$.

La variable x est muette pour le booléen A (le symbole mutificateur est "$\forall$") mais elle ne l'est pas pour le booléen $A(x)$ (pas de symbole mutificateur). On dit que x est une variable parlante pour le booléen $A(x)$. C'est ainsi que la valeur de vérité du booléen A ne dépend pas de la variable x qui est muette pour A alors que celle du booléen $A(x)$ (comme son nom l'indique) peut en dépendre.

Quand on déclare une variable avec le mot " SOIT ...", qu'elle soit affectée ou pas, elle devient parlante pour les objets mathématiques qui l'utilisent et cela jusqu'à la fin de la démonstration. Une telle déclaration revient donc d'une certaine manière à figer la variable x pendant toute la démonstration.

Bilan rapide :
Certains objets mathématiques s'expriment avec des variables rendues muettes par des symboles mutificateurs qui servent à les déclarer. Quand un objet mathématique s'exprime avec une variable sans symbole mutificateur on dit que la variable est parlante pour lui. La valeur d'un objet mathématique est indépendante d'une variable muette pour lui.

1.6 Rédaction d'une démonstration d'une assertion quantifiée

1.6.1 Équivalence de booléens

Définition 1.6.1. *On dit que deux booléens A et B sont équivalents, et on note $A \iff B$, lorsque A et B sont simultanément vrais et simultanément faux.*

Dans la pratique, pour étudier la valeur VRAIE ou FAUX d'un booléen, on peut être amené à le reformuler et si cette reformulation est équivalente alors on utilise ce symbole pour le dire ; l'une des utilisations fréquentes de ce symbole est la résolution d'équations ou d'inéquations sur laquelle on reviendra à la fin du chapitre.

Le symbole d'équivalence ne s'utilise qu'entre deux booléens, il ne doit pas être utilisé à la place d'un égal de calcul par exemple. Il est conseillé aux étudiants de $L1$ de l'utiliser le moins possible dans les démonstrations et de le réserver aux résolutions d'équations ou inéquations dans un premier temps en s'appliquant à bien l'utiliser dans ce contexte.

Ex 4 : $x^2 + 2x + 1 \iff (x+1)^2$
C'est HORRIBLE!!!! $x^2 + 2x + 1$ n'est pas un booléen, on ne peut pas lui attribuer de valeur vrai ou faux, c'est juste une formule. Ici il fallait écrire $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

■ **Exercice corrigé (correction en vidéo)**
VRAI OU FAUX ?
a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :
1) La variable x est parlante pour le booléen $x^2 + x + 1 < 0$.
2) $x^2 + 2x + 1 < 0 \iff (x+1)^2 < 0$.
3) $x^2 + 2x + 1 < 0$ est faux.

b) Soit le booléen A : "$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y \iff x^2 < y^2$".
1) A est vrai.
2) Les variables x et y sont muettes pour A.

c) Soit le booléen A : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,\ x < y \iff x^2 < y^2$. A est vrai.

d) Soit le booléen A : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-,\ x < y \iff x^2 < y^2$. A est vrai.

e) Soit l'intégrale $I = \int_0^{12} (xt^2 + 8)dt$.
1) Avec cette phrase on déclare un booléen de comparaison.
2) La variable t est déclarée et muette pour I.
3) La variable x n'est pas déclarée.
4) La variable x est muette pour I.

1.6.2 Prouver qu'un booléen universel est vrai

Quelle est la rédaction attendue pour prouver qu'un booléen universel est vrai ?

Pour prouver qu'un booléen universel affichée en "$A \; : \; \forall u \in E, \; A(u)$" est vraie, on commence en déclarant une variable formelle u de E **avec le mot soit**, de sorte que cette variable u devienne parlante (et donc figée) pour toute la démonstration puis on trouve les arguments qui prouvent que le booléen $A(u)$ est vrai.

■ **Exercice corrigé (correction en vidéo)**
Montrer que "$\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n-1)$ est pair".

1.6.3 Prouver qu'un booléen existentiel est vrai.

Quelle est la rédaction attendue pour une preuve d'assertion existentielle ?
C'est plus compliqué, il y a plusieurs façons de répondre, on va en proposer une seule dans ce cours.

Soit un booléen existentiel affiché en $A \; : \; \exists u \in E, \; A(u)$. Si on est capable de déclarer u dans E AFFECTÉ et d'argumenter que $A(u)$ est vrai alors on a prouvé A vrai.

■ **Exercice corrigé (correction en vidéo)**
Montrer que "$\exists x \in \mathbb{R} \mid \sin x = x$"

Comment fait-on pour trouver une affectation qui convient pour prouver " $A \; : \; \exists u \in E, A(u)$ " ? 1) Quand on n'a pas d'idée d'affectation pour déclarer la variable dont l'existence est à prouver, on peut commencer par rédiger une analyse. On déclare donc d'abord la variable u formelle puis on analyse ce que veut dire $A(u)$ vrai jusqu'à trouver l'idée d'une affectation pour u qui conviendra. L'analyse de $A(u)$ vrai peut être une reformulation équivalente ou pas, ce qui compte c'est de trouver une idée pour déclarer u dans une deuxième partie que l'on appelle synthèse. 2) Synthèse : On déclare u affecté et on donne les arguments qui prouvent que $A(u)$ est vérifié. La synthèse est essentielle car l'analyse n'est pas une preuve de l'existence, c'est une recherche d'idée.

■ **Exercice corrigé (correction en vidéo)**
1) Montrer que " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y < 0 \mid x^2 + x + 1 = y^2$ "
2) Soit le booléen $A \; : \; \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in \mathbb{R} \backslash \{-1;1\}, \dfrac{5x+1}{x^2-1} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$
Montrer que A est vrai.

1.6.4 Prouver qu'un booléen est faux

Méthode 1 : Prouver que la négation de ce booléen est vrai.

Méthode 2 : faire une démonstration par l'absurde en supposant le booléen vrai et aboutir à une contradiction, quelque chose de clairement faux.

■ **Exercice corrigé (correction en vidéo)**
a) Soit A l'assertion : "$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \mid y = x^2$ ".
(i) Montrer que A est faux en prouvant que sa négation est vraie.
(ii) Faire une nouvelle preuve de a faux avec une démonstration par l'absurde.
b) Montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

1.7 Exemples usuels de déclaration d'objets et de rédaction.

1.7.1 Les fonctions

Les variables des fonctions sont muettes mais il faut tout de même trouver une façon d'afficher leur ensemble d'appartenance.

■ Soit $f(x) = (x^2 + 12)\sqrt{x}$
Avec cette phrase on déclare la fonction f de façon parlante et la variable x qui apparait dans $f(x)$ est muette pour f.
Une telle déclaration n'affiche pas l'ensemble auquel appartient la variable x, il faut donc aussitôt prendre l'initiative de déclarer le domaine d'appartenance le plus grand de cette variable qui va être D_f le domaine de définition de f.
On pourra donc écrire par exemple : Soit $f(x) = (x^2 + 12)\sqrt{x}$. Alors $D_f = [0; +\infty[$ et en écrivant cela on indique implicitement que la variable muette x est dans l'ensemble $[0; +\infty[$.

■ Soit $g(x) = \dfrac{x+12}{x-5}$ **sur** $]5; +\infty[$
Avec cette phrase on déclare g de façon parlante et on précise que la variable muette x est déclarée dans l'ensemble $]5; +\infty[$.
L'avantage de garder muette la variable d'une fonction c'est qu'on peut par la suite considérer $g(x)$ sur $]-\infty; 5[$ si on veut, le nom x n'est pas figé contrairement à une variable parlante.

1.7.2 Les applications.

■ Soit $\begin{array}{llll} f: &]0; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln x + 12 \end{array}$
On vient de déclarer une application f parlante avec sa variable x qui cette fois est déclarée (muette) dans $]0; +\infty[$ et en plus on affiche que cette variable x a le droit de prendre toutes les valeurs de $]0; +\infty[$. L'élément $f(x)$ lui est typé comme appartenant à $\mathbb{R}$ ce qui ne veut pas dire qu'il prendra toutes les valeurs de $\mathbb{R}$. On dit qu'on vient de déclarer une application de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ et on écrit $f \in \mathcal{F}(]0; +\infty[, \mathbb{R})$.
L'ensemble $]0; +\infty[$ est appelé ensemble de départ ou source de f tandis que l'ensemble $\mathbb{R}$ est appelé ensemble d'arrivée ou but de f.

■ Soit $f \in \mathcal{F}([12; +\infty[, \mathbb{R}^+)$

On vient ici de déclarer une application f formelle, on sait simplement que sa variable x est un élément de $[12;+\infty[$ et que $f(x)$ sera un réel positif.

1.7.3 Les équations ou inéquations

Soit l'équation $(E) : x^2+x+1=0$ sur $\mathbb{R}$

On a déclaré ici une équation en précisant que l'inconnue x est de type réelle (sans cette précision, on pourrait aussi s'intéresser à une inconnue x de type complexe par exemple).

Une équation ou inéquation c'est un booléen de comparaison dont la valeur dépend à priori de son (ou ses) inconnue(s).

Résoudre une équation c'est chercher les affectations des inconnues qui rendent le booléen de comparaison vrai, ces affectations sont les solutions de l'équation

On est souvent amené à des reformulations de (E) pour résoudre et si ces reformulations donnent un booléen équivalent alors il faut le signaler avec le symbole $\Longleftrightarrow$ à moins que l'équation ne soit usuelle auquel cas il y a une grande tolérance sur la rédaction.

Avant de démarrer les reformulations pour résoudre (E), il faudra toujours s'intéresser au domaine de définition de (E) et le gérer.

■ **Exercice corrigé (correction en vidéo)**

a) Résoudre l'équation (E_1) : $\sqrt{x+1}=x$ sur $\mathbb{R}$.

b) Résoudre l'équation (E_2) : $x^2+3x+4=0$ sur $\mathbb{R}$.

c) Résoudre l'inéquation (E_3) : $\sqrt{x+3}<x$ sur $\mathbb{R}$.

1.7.4 Les équations à paramètre

Ce sont des équations qui mettent en scène, en plus de leur(s) inconnue(s) une variable parlante formelle déclarée avant l'équation que l'on appelle un paramètre.

■ Soit $m\in\mathbb{R}$.

Soit (E) : $(m-1)x+3=0$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.

Pour les résoudre, il faut se souvenir qu'une variable parlante est figée et on est donc souvent amené pendant la résolution à envisager tous les cas possibles avec une structure "SI (le paramètre est comme ceci)...alors $(E)\Longleftrightarrow$ .... SI (le paramètre est comme cela)...alors ... SINON ..."

■ **Exercice corrigé (correction en vidéo)**

1) Soit $a\in\mathbb{R}$. Soit (E) l'équation $ax+5=x-7$ d'inconnue x réelle.
Résoudre (E).

2) Soit $m\in\mathbb{R}$. Soit (E) : $(m-1)x+3=0$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.
Résoudre (E).

1.7.5 Les démonstrations par récurrence.

Attention, certaines méthodes de rédaction apprises en terminale ne sont pas satisfaisantes dans le supérieur.

■ **Exercice corrigé (correction en vidéo)**

Soit $a\in\mathbb{R}^+$. Montrer par récurrence la propriété :
$\forall n\in\mathbb{N},\ (1+a)^n\geq 1+na$

1.7.6 Les calculs algébriques

Il est important d'afficher les valeurs de la variable pour lesquelles le calcul est valable.
Ex : $\cos(2x) - \cos^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 - \cos^2(x) = \cos^2(x) - 1 = \sin^2(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$

Il est précisé à la fin du calcul que c'est une affirmation valable pour chaque valeur x réelle, idéalement l'afficher dès le début serait mieux mais pour un simple calcul on tolère ce type de déclaration, c'est toujours mieux que d'oublier sa déclaration de variable.

On pourrait aussi écrire, par analogie avec les fonctions :
$\cos(2x) - \cos^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 - \cos^2(x) = \cos^2(x) - 1 = \sin^2(x)$ sur $\mathbb{R}$.
On aurait aussi pu fixer une variable x parlante non affectée avant le début du calcul.
Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\cos(2x) - \cos^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 - \cos^2(x) = \cos^2(x) - 1 = \sin^2(x)$.

1.7.7 Déclarer une variable à particularité.

Il arrive souvent que l'on veuille déclarer une variable parlante qui a une particularité. On peut alors utiliser la structure " Soit ... tel que ..." mais il faut alors faire très attention quand on déclare un tel objet, il faut être sûr qu'il existe, soit parce que l'existence est évidente (comme dans l'exemple 1), soit parce qu'elle a été démontrée avant.
Rappelons que " tel que " en math peut s'exprimer avec le symbole | ou tout simplement avec une virgule.

Ex 1 : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0$
Ici l'existence est évidente.

Ex 2 : Soit $x \in \mathbb{Q} \, |x^2 = 2$
Un tel x n'existe pas, c'est donc embêtant de le déclarer comme s'il existait, ça fausse la rédaction en donnant l'impression qu'il existe.

Ex 3 : Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = y^2$
Un tel y existe mais il faut expliquer pourquoi, sans complément de rédaction la copie sera pénalisée.

Chapitre 1 : Exercices de cours

Exercice 1 :

On rappelle que la notation $a|b$ quand a et b sont des entiers relatifs signifie que a est un diviseur de b.

Selon vous, les booléens suivants sont-ils vrais ou faux ? Baptiser chaque assertion comme dans le cours puis faire la preuve.

(1) $\forall \varepsilon > 0, \exists a > 0 \mid a < \varepsilon$

(2) $\exists n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{N}^*, n|m$

(3) $\forall n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}, \exists m \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\} \mid m|n$

(4) $\exists M \in \mathbb{R} \mid \ \forall x \in \mathbb{R}, |\cos(x)| \leq M$

(5) $\exists n \in \mathbb{N}^* \mid \forall m \in \mathbb{N}^*, m|n$

(6) $\exists a > 0 \mid \forall \varepsilon > 0, a < \varepsilon$

Exercice 2 :

On définit une opération notée $*$ entre deux réels x et y en posant $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Vérifier que $\sqrt{3} * 3 = \sqrt{12}$

b) Montrer que le booléen A : " $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ x * y \in \mathbb{R}^+$" est vrai.

c) Soit le booléen B : "$\exists e \in \mathbb{R} \mid \ \forall x \in \mathbb{R}^+, x * e = x$ ". Montrer que B est vrai.

d) Soit le booléen C : "$\exists e \in \mathbb{R} \mid \ \forall x \in \mathbb{R}, x * e = x$ ". Montrer que C n'est pas vrai

e) Soit l'assertion D : "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid x * y = 0$". Montrer que D est faux.

Exercice 3 :

1) Soit a et b deux réels. Quelle est la condition à vérifier pour que l'équivalence " $a = b \iff a^2 = b^2$ " soit vraie ?

2) Résoudre les trois équations suivantes d'inconnue x réelle.

a) (E_1) : $\sqrt{2x+1} = -\sqrt{x}$

b) (E_2) : $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x-3}$

c) (E_3) : $2\sqrt{x+3} + 6 = 2x - 2$

Exercice 4 :

Soit a et b deux réels et (E) : $ax + 2 = 3x + b$ d'inconnue x réelle.

Résoudre (E).

Exercice 5 :

Soit E et F deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est surjective quand l'assertion suivante est vérifiée : " $\forall t \in F, \exists x \in E \mid f(x) = t$ "

a) Reformuler cette assertion en langage courant en utilisant le vocabulaire "antécédent".

b) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$. L'application g est -elle surjective ?

c) Soit $h : \mathbb{R} \to [0; +\infty[$ définie par $h(x) = x^2$. l'application h est-elle surjective ?

d) Soit $\varphi(x) = \dfrac{x}{x-2}$

(i) Déterminer D_φ.

(ii) L'application associée par défaut à φ est-elle surjective ?

e) Soit $f((x,y)) = (x - 2y, 3x, y + 12)$. Quelle est l'application associée par défaut à f ? Est-elle surjective ?

Chapitre 2

Déclarer un ensemble, sous-ensembles usuels

2.1 Les ensembles usuels

Les objets mathématiques, tout comme les objets informatiques, ont un **type**, c'est à dire une appartenance à un ensemble de référence, dit usuel qu'on utilise souvent pour déclarer nos objets.

Les "nombres usuels" :

• $12 \in \mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels (c'est-à-dire entiers positifs ou nuls) ;

• $-12 \in \mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs (c'est-à-dire entiers positifs, négatifs ou nuls) ;

• $\dfrac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, c'est à dire les nombres qui peuvent s'écrire (de façon non unique) sous la forme d'un quotient de deux entiers relatifs ;

• $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, il est constitué des rationnels et des nombres irrationnels.

• $3 - 12i \in \mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, tout nombre complexe s'écrit de façon unique sous la forme $x + iy$ avec x et y dans $\mathbb{R}$.

On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Les n-uplets : $(x_1, x_2, \dots x_n)$

Ce sont des objets qui appartiennent à des produits cartésiens d'ensembles usuels basiques :

• Les 2-uplets sont appelés couples : $(\pi, -5) \in \mathbb{R}^2$, $(\dfrac{1}{12}, -8) \in \mathbb{Q}^2$, $(-5, 3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ etc ...

• Les 3-uplets sont appelés triplets : $(-5, \pi, \sqrt{2}) \in \mathbb{R}^3$ etc ...

• $(1 - i, 12, -7, 3i) \in \mathbb{C}^4$

Nous verrons très rapidement d'autres ensembles usuels, $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ qui nous servira à déclarer une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais aussi $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes formels à coefficients réels ou encore $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients complexes et bien d'autres ...

2.2 Les parties (sous-ensembles) des ensembles usuels.

En mathématiques, on a très souvent besoin de décrire des sous-ensembles inclus dans des ensembles de référence. Trois notations sont utilisées pour décrire des sous-ensembles qui utilisent toutes des accolades $\{ \quad \}$:

2.2.1 L' énumération des éléments dans le cas d'un ensemble fini

Lorsque l'ensemble est fini avec peu d'éléments (et uniquement dans ce cas), on peut le décrire en énumérant ses éléments. Par exemple, $E = \{4; 5; -12\}$ ou $F = \{12; i\}$ ou
$G = \{(1, 3); (-5, 12)\}$.

Pour dire qu'un ensemble fait partie d'un autre ensemble on utilise le symbole $\subset$ et non pas le symbole $\in$

Ex 1 : On observe que $E \subset \quad$, $F \subset \quad$, $G \subset \quad$.

Un ensemble constitué d'un seul élément s'appelle un singleton. Le nombre d'éléments d'un ensemble fini A s'appelle le cardinal de A.

Ex 2 : Card $(E) = \quad$, card$(F) = \quad$, card$(G) =$

Exercice corrigé

1) Déterminer l'ensemble des diviseurs positifs de 12 ainsi que son cardinal.

2) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E) : $x^2 - 3x + 2$ d'inconnue x réelle.

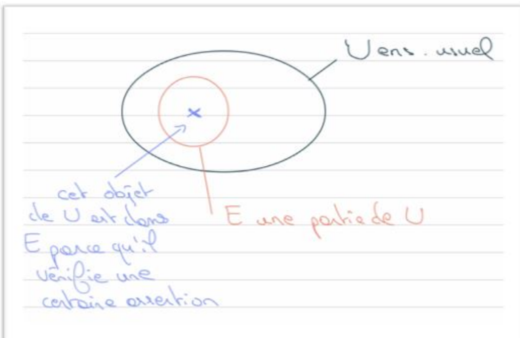
2.2.2 L'écriture dite { type | condition }

Ex 1 : (cf vidéo pour commentaire)

$$\text{Soit } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 3\}$$

Cette phrase permet de déclarer la droite D du plan d'équation $x - 2y = 3$ en tant que partie de $\mathbb{R}^2$, l'équation de la droite est un booléen qui prend la valeur vraie exactement quand la variable (x, y) appartient à la droite et on l'utilise donc comme condition pour déclarer notre ensemble D.

L'écriture dite { type | condition } est l'écriture appropriée quand on connait un booléen (une condition) $B(u)$ qui prend la valeur vraie exactement quand la variable u est dans E.



$$E = \{u \in U \mid B(u)\}$$

La (les) variable(s) utilisée(s) juste après l'accolade ouvrante sont muettes pour l'ensemble E (les accolades $\{ \quad \}$ sont des symboles mutificateurs) mais parlantes pour le booléen.

Ex 2 : Déclarer l'ensemble A des nombres entiers relatifs multiples de 12.

$$\text{Soit } A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv 0\ [12]\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ n = 12k\}$$

Ex 3 : Soit $A(x_A, y_A) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. Décrire géométriquement l'ensemble E suivant :

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2\}$$

E est

Ex 4 : Déclarer la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction $f(x) = x^2$.

$$\mathcal{C} =$$

Exercice corrigé 1

1) Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 12y = 5\}$.
(i) Est-ce que $(5, 0, 0) \in A$?
(ii) Est-ce que $(1, 3) \in A$?
(iii) Est-ce que $(5, 0) \in A$?

2) Soit $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 12y + z = 0 \text{ et } x - y = 3\}$.
(i) Est-ce que $(5, 0) \in B$?
(ii) Est-ce que $(1, 0, -1) \in B$?
(iii) Est-ce que $(3, 0, -3) \in B$?

3) Soit $C = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, x = 3k\}$
(i) Est-ce que $(5, 0) \in C$?
(ii) Est-ce que $2 \in C$?
(iii) Est-ce que $12 \in C$?

4) Soit $D = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \exists k \in \mathbb{R}, u = k(-3, 12)\}$
(i) Est-ce que $(5, 0) \in D$?
(ii) Est-ce que $2 \in D$?
(iii) Est-ce que $(0, 0) \in D$?

Exercice corrigé 2

1) Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 12y = 5\}$.
(i) Déclarer une variable parlante affectée de A.
(ii) Déclarer une variable parlante non affectée de A en affichant un maximum d'informations.

2) Soit $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 12y + z = 0 \text{ et } x - y = 3\}$.
(i) Déclarer une variable parlante affectée de B.
(ii) Déclarer une variable parlante non affectée de B en affichant un maximum d'informations.

3) Soit $C = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, x = 3k\}$
(i) Déclarer une variable parlante affectée de C.
(ii) Déclarer une variable parlante non affectée de C en affichant un maximum d'informations.

4) Soit $D = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \exists k \in \mathbb{R}, u = k(-3, 12)\}$

(i) Déclarer une variable parlante affectée de D.
(ii) Déclarer une variable parlante non affectée de D en affichant un maximum d'informations.

2.2.3 L'écriture dite { forme ; type } ou paramétrique ou explicite

Ex 1 : cf vidéo pour commentaire

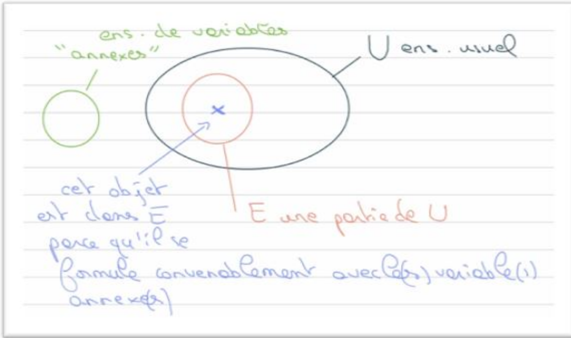
$E = \{(x, 12x) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$

Cette déclaration ensembliste est en fait un ensemble { type | condition } où la condition est un booléen existentiel :

$E = \{u \in \mathbb{R}^2 \ |\exists x \in \mathbb{R}, u = (x, 12x)\}$

et finalement on reconnait la droite du plan d'équation $y = 12x$.

L'écriture { forme ; type } est appropriée quand on connait une spécificité d'écriture de la variable possible exactement quand la variable est dans E. Cette écriture nécessite l'utilisation de variables annexes déclarées avant l'accolade fermante.



$E =$ { L'écriture spécifique d'un objet de E ; variable(s) typée(s) utilisées pour cette écriture }

Les variables annexes sont muettes pour l'ensemble E et un tel ensemble peut se reformuler avec un booléen existentiel en { type | condition }

Ex 2 : $F = \{n\sqrt{2} \ ; \ n \in \mathbb{Z}\}$

Ex 3 : $G = \{e^x \ ; x \in \mathbb{R}\}$

Ex 4 : $A = \{(x, x^2) \ ; \ x \in [-2; 3]\}$

Exercice corrigé 1

1) Soit $A = \{(x - 12, 2x - 8) \ ; x \in \mathbb{R}\}$.

(i) Déclarer une variable parlante affectée de A.

(ii) Déclarer une variable parlante non affectée de A en affichant un maximum d'informations.

2) Soit $B = \{(x-2y, 2y, x+y) \; ; x, y \in \mathbb{R}\}$.
(i) Déclarer une variable parlante affectée de B.
(ii) Déclarer une variable parlante non affectée de B en affichant un maximum d'informations.

3) Soit $C = \{\sqrt{2}k \; ; k \in \mathbb{Z}\}$
(i) Déclarer une variable parlante affectée de C.
(ii) Déclarer une variable parlante non affectée de C en affichant un maximum d'informations.

4) Soit $D = \{(x, x^2) \; ; x \in \mathbb{R}\}$

(i) Déclarer une variable parlante affectée de D.
(ii) Déclarer une variable parlante non affectée de D en affichant un maximum d'informations.

Exercice corrigé 2

1) Soit $A = \{(x-12, 2x-8) \; ; x \in \mathbb{R}\}$.
(i) A-t-on $12 \in A$?
(ii) A-t-on $(0,0) \in A$?
(iii) A-t-on $(-11,-6) \in A$?

2) Soit $B = \{(x-2y, 2y, x+y) \; ; x, y \in \mathbb{R}\}$.
(i) A-t-on $(1,3) \in B$?
(ii) A-t-on $(0,0,0) \in B$?
(iii) A-t-on $(1,2,3) \in B$?

3) Soit $C = \{\sqrt{2}k \; ; k \in \mathbb{Z}\}$
(i) A-t-on $2 \in C$?
(ii) A-t-on $-3\sqrt{2} \in \mathbb{C}$?

4) Soit $D = \{(x+2, x^2) \; ; x \in \mathbb{R}\}$
(i) A-t-on $12 \in D$?
(ii) A-t-on $(3,-9) \in D$?
(iii) A-t-on $(5,9) \in D$?

2.3 Sous-ensemble usuels

2.3.1 Les droites de $\mathbb{R}^2$.

Propriété 2.3.1.
Soient a, b, α, β des réels tels que $\vec{u}(\alpha, \beta)$ soit non nul. L'ensemble E défini par :

$$E = \{(a,b) + x(\alpha, \beta) \; ; \; x \in \mathbb{R}\}$$

est la droite du plan qui passe par $A(a,b)$ et dirigée par $\vec{u}(\alpha, \beta)$.

Ex 1 : Soit $E = \{(2x-7, 3x+12) \; ; \; x \in \mathbb{R}\}$.

2.3.2 Les droites de $\mathbb{R}^3$.

Propriété 2.3.2.
Soient $a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$ des réels tels que $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ soit non nul. L'ensemble E défini par :

$$E = \{(a,b,c) + x(\alpha,\beta,\gamma)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$$

est la droite de l'espace qui passe par $A(a,b,c)$ et dirigée par $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Ex 2 : Soit $E = \{(x-7, 8, 12-x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$.

2.3.3 Les plans de $\mathbb{R}^3$.

Propriété 2.3.3.
Soient $a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha',\ \beta',\ \gamma'$ des réels et l'ensemble E défini par :

$$E = \{(a,b,c) + x(\alpha,\beta,\gamma) + y(\alpha',\beta',\gamma')\ ;\ x,y \in \mathbb{R}\}$$

Si $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ et $\vec{v}(\alpha',\beta',\gamma')$ ne sont pas colinéaires, alors E est le plan qui passe par $A(a,b,c)$ dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Sinon, E est la droite de l'espace qui passe par $A(a,b,c)$ dirigée par $\vec{u}$.

Ex 3 : Soit $E = \{(2x-3y+5, 3x+12, y-x-5)\ ;\ x,y \in \mathbb{R}\}$.

Soit $F = \{(x+2y+1, 2x+4y, 3x+6y-2)\ ;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

2.3.4 Les parties de $\mathbb{R}^2$ délimitées grâce à des courbes de fonction

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I à valeurs réelles.

1) La portion de courbe de f délimitée par l'intervalle I peut être déclarée en tant que sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ de la façon suivante :

$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I,\ y = f(x)\} = \{(x, f(x))\ ;\ x \in I\}$

Ex 1 :

2) La partie du plan délimitée verticalement par les extrémités de I et située en dessous de la courbe de f peut être déclarée de la façon suivante :
$E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I,\ y < f(x)\}$

Ex 2 :

3) La partie du plan délimitée verticalement par les extrémités de I et située au dessus de la courbe de f peut être déclarée de la façon suivante :
$E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I,\ y > f(x)\}$

Ex 3 :

4) Soit g une fonction définie sur I.

Alors l'ensemble $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, g(x) < y < f(x)\}$ est soit vide si $f \leq g$ sur I, soit la partie du plan située en dessous de la courbe de f et au dessus de la courbe de g sur la partie de I où $f > g$ est vérifiée.

Ex 4 :

2.3.5 Les parties de $\mathbb{R}^2$ délimitées par un cercle

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 < r^2\}$ est le disque ouvert de centre $A(a, b)$ et de rayon r.

$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 > r^2\}$ est l'extérieur du disque ouvert de centre $A(a, b)$ et de rayon r.

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ |(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2\}$ est le cercle de centre $A(a, b)$ et de rayon r.

2.3.6 Les parties de $\mathbb{R}$ données par les images d'une fonction

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur l'intervalle I et à valeurs réelles.

L'ensemble $E = \{f(x) \ ; \ x \in I\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ noté $f(I)$ et appelé image de I par f.

Si f est continue sur l'intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle (théorème des valeurs intermédiaires).

Ex 1 : Soit $E = \{x^2 \ ; \ x \in [-2; 3]\}$.
Soit $f(x) = x^2$, alors $E = f([-2; 3]) = [0; 9]$.

2.4 Inclusion d'ensembles, égalité d'ensembles

Propriété 2.4.1.
(i) Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Alors :

$$A \subset B \Longleftrightarrow A = \emptyset \text{ ou } \forall a \in A, \ a \in B$$

(ii) Soit A et B deux parties ***non vides*** *d'un ensemble E. Alors :*

$$A \subset B \Longleftrightarrow \forall a \in A, \ a \in B$$

Très souvent, les ensembles sont visiblement non vides et on utilise donc l'équivalence (ii) pour montrer qu'il y a inclusion ou pas.

Ex 1 : Soit $A = \{(y-2, y, 2y-5) \ ; \ y \in \mathbb{R}\}$. Soit $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z = 3 \text{ et } 2y-z = 5\}$
Montrer que $A \subset B$ puis montrer que $B \subset A$.

Propriété 2.4.2.
Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Alors :

$$A = B \Longleftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset A$$

Dans l'exemple 1, on a prouvé par double inclusion que $A = B$.

Remarque : Certaines égalités entre deux ensembles sont immédiates et évidentes, auquel cas on écrit l'égalité sans passer par une double inclusion.

Ex 2 :
$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 12y = 3\} = \{(3 + 12y, y) \ ; \ y \in \mathbb{R}\}$

Chapitre 2 : Le langage ensembliste, parties usuelles de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Exercice 6 :

Soit $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y + z = 0\}$.
(i) Est-ce que $(0, 0, 0) \in A$?
(ii) Déclarer en justifiant une variable parlante affectée de A ayant pour première coordonnée 2.
(iii) Déclarer une variable parlante non affectée de A en affichant un maximum d'informations.
(iv) Soit le booléen P : $\forall u \in A, 3u \in A$
Montrer que P est vraie.

Exercice 7 :

Soit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y = 12\}$.
(i) Est-ce que $(-1, 3) \in B$?
(ii) Déclarer une variable parlante affectée de B en justifiant.
(iii) Déclarer une variable parlante non affectée de B en affichant un maximum d'informations.
(iv) Soit le booléen P : $\forall u \in B, 3u \in B$
Montrer que P n'est pas vrai.

Exercice 8 :

Soit $C = \{(x, 3x) \; ; x \in \mathbb{R}\}$
(i) Reformuler l'ensemble C en { type ; condition existentielle }.
(ii) A-t-on $(0, 0) \in C$? A-t-on $(1, 2) \in C$?
(ii) Déclarer une variable parlante affectée de C.
(iii) Déclarer une variable parlante non affectée de C en affichant un maximum d'informations.
(iv) Soit l'assertion P : $\forall u \in C, 3u \in C$
Montrer que P est vrai.

Exercice 9 :

Soit $D = \{(x + y, 3x + 1, -y) \; ; x, y \in \mathbb{R}\}$
(i) Reformuler l'ensemble D en { type ; condition existentielle }.
(ii) A-t-on $(0, 0, 0) \in D$? A-t-on $(2, 10, -1) \in D$?
(iii) Déclarer une variable parlante affectée de D.
(iv) Déclarer une variable parlante non affectée de D en affichant un maximum d'informations.
(iv) Soit l'assertion P : $\forall u \in D, 3u \in D$
Montrer que P n'est pas vrai.

Exercice 10 :

Soit $A = \{(x, 2x, 3x) \; ; x \in \mathbb{R}\}$. Soit $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -13x - y + 5z = 0\}$.

a) Écrire avec des quantificateurs $A \subset B$.
Montrer que cette inclusion est vraie.
b) Écrire avec des quantificateurs $B \subset A$. Montrer que cette inclusion n'est pas vraie.

Exercice 11 :

Les ensembles ci-dessous correspondent à des parties usuelles de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Dessiner les quand ce sont des parties de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ et décrivez-les par une phrase quand ce sont des parties de $\mathbb{R}^3$.

a) $A = \{(x+3, x-5)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$
b) $B = \{x^2+3\ ;\ x \in [-3;2]\}$
c) $C = \{(x-y+2, 3x-6, y+5)\ ; x, y \in \mathbb{R}\}$
d) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \leq x \leq 2 \text{ et } y = x^2+3\}$;
e) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4 \text{ et } y \leq |x|\}$
f) $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-2)^2 \leq 3\}$;
g) $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$
h) $I = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\}$;
i) $J = \{7, a-8)\ ;\ a \in \mathbb{R}\}$
j) $K = \left\{\dfrac{1}{x+3}\ ;\ x \in [2;4]\right\}$
k) $L_1 = \{(a, 12a)\ ;\ a \in \mathbb{R}\}$; $\quad L_2 = \{(a, 12a)\}$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé au préalable.
l) $M = \{(3x, -x, 12x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$
m) $N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 2 \text{ et } x^2 \leq y \leq -x^2 + x\}$
n) $O = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, \pi] \text{ et } y - \sin x \geq 0\}$
o) $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0\}$
p) $Q = \{e^x + 3\ ; x \in \mathbb{R}\}$
q) $R = \{(x, e^x + 3)\ ; x \in \mathbb{R}\}$
r) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}\ ; x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 \leq 0\}$
s) $T = \{(3x+6y; 2x+4y, x+2y);\ x, y \in \mathbb{R}\}$
t) $U = \{|x|\ ; x \in \mathbb{R}\}$;
u) $V = \{(x+2y-5; 2x+4y+12, 3x+6y);\ x, y \in \mathbb{R}\}$
v) $W = \{(x, 3x-5, 12x+2)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$

Chapitre 3

Connecteurs logiques, intersection et union d'ensembles

3.1 Les connecteurs logiques

Soit A et B deux assertions. Il y a quatre connecteurs logiques qui permettent de "fabriquer" des assertions dites " composées ".

3.1.1 Le connecteur "NON" (noté $\neg$)

Propriété 3.1.1. *Étant donné une assertion A , le connecteur $\neg$ (NON) permet de fabriquer la nouvelle proposition $\neg A$ qui est vraie si et seulement si A est fausse*

Voici la table de vérité du "NON" :

A	$\neg A$
0	1
1	0

FAUX et VRAI sont représentés respectivement par 0 et 1.

Propriété 3.1.2. *Soit E un ensemble, et $A(u)$ une assertion sur une variable u de E.*

(i) Étant donné une assertion universelle A avec la structure " $\forall u \in E, A(u)$" la négation de A est l'assertion $\neg A$: $\exists u \in E,\ \neg A(u)$

(ii) Étant donné une assertion existentielle A avec la structure " $\exists u \in E, A(u)$" la négation de A est l'assertion $\neg A$: $\forall u \in E,\ \neg A(u)$

Ex 1 : Soit $A\ :\ \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ alors $\neg A\ :\ \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0$

Ex 2 : Soit $A\ :\ \exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 12 = 0$ alors $\neg A\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 12 \neq 0$

Exercice 1 corrigé sur le " NON "
(correction sur le site https ://laurencedipoi.wixsite.com/site)

On rappelle que la notation $a|b$ quand a et b sont des entiers relatifs signifie que a est un diviseur de b.

Écrire la négation des assertions suivantes

(1) $\forall x \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}$
(2) $\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \sqrt{2} \neq \dfrac{a}{b}$
(3) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m|n$
(4) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m|n$
(5) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n|m$
(6) $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, |\cos(x)| \leq M$

Quand utiliser le "NON" ?
Pour montrer qu'une assertion A est fausse, on peut montrer que $\neg A$ est vraie.

Exercice 2 corrigé sur le " NON " :
(correction sur le site https ://laurencedipoi.wixsite.com/site)

Montrer que l'assertion A : $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m|n$ est fausse en prouvant que $\neg A$ est vraie.

3.1.2 Le connecteur "ET" (notée $\wedge$)

Propriété 3.1.3. *Étant donné deux assertions A et B, le connecteur $\wedge$ (ET) permet de fabriquer la nouvelle proposition $A \wedge B$ qui est vraie si et seulement si A et B sont vraies.*

Voici la table de vérité du "ET" :

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

FAUX et VRAI sont représentés respectivement par 0 et 1.

Comment montrer un "ET" ?
Pour montrer $A \wedge B$ on fait **deux démonstrations distinctes**, l'une qui prouve que A est vérifiée, l'autre qui montre que B est vérifiée.

Exercice corrigé sur le "ET"
(correction sur le site https ://laurencedipoi.wixsite.com/site)

Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 0\}$.
1) Montrer que E est non vide.
2) Montrer l'assertion suivante :
$(\forall u, v \in E, u + v \in E) \wedge (\forall (u, \lambda) \in E \times \mathbb{R},\ \lambda u \in E)$

3.1.3 Le connecteur "IMPLIQUE" (noté $\Rightarrow$)

Propriété 3.1.4. *Étant donné deux assertions A et B, on peut créer une nouvelle proposition $A \Rightarrow B$. Cette assertion est fausse si et seulement si A est vraie et B est fausse.*

Voici la table de vérité du $\Rightarrow$:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$A \Rightarrow B$ peut se lire de plusieurs façons :

"A vraie implique B vraie ".
" Si A est vraie, alors B sera vraie aussi".
" Il suffit que A soit vraie pour que B le soit ".
"Il faut que B soit vraie pour que A le soit ".

Le symbole $\Rightarrow$ parle de ce qu'il se passe quand A est vrai (le fait que B doit alors l'être aussi), on comprend donc très bien les deux dernières lignes de la table de vérité. Finalement, ce symbole ne parle pas de ce qu'il se passe quand A est fausse et il parait donc logique de considérer que dès que A est faux alors B peut être faux ou vrai, ça ne compte pas pour considérer que $A \Rightarrow B$ est vrai ce qui explique les deux premières lignes de la table.

Comment montrer un $\Rightarrow$?
Pour montrer $A \Rightarrow B$ on écrit que l'on suppose que A est vérifié puis on prouve que B est vrai avec cette hypothèse.

Exercice 1 corrigé sur le "$\Rightarrow$"
(correction sur le site https ://laurencedipoi.wixsite.com/site)

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \text{ impair}) \Rightarrow (n^2 \text{ impair})$$

Propriété 3.1.5.
Soit trois assertions A, B et C.
(i) $\neg(A \Rightarrow B)$ est l'assertion $A \wedge (\neg B)$
(ii) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ (Transitivité)
(iii) $A \iff B$ si et seulement si $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Exercice 2 corrigé sur le "$\Rightarrow$"
(correction sur le site https ://laurencedipoi.wixsite.com/site)

1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Écrire la négation de

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y)$$

2) Écrire la négation de l'assertion suivante :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ ((a \neq -1) \wedge (b \neq -1)) \Rightarrow (a + b + ab \neq -1)$$

3.1.4 La conjonction "OU" (notée $\vee$)

Propriété 3.1.6. *Étant donné deux assertions A et B, on peut créer une nouvelle proposition $A \vee B$. Cette assertion est fausse si et seulement si A est fausse et B est fausse.*

Voici la table du vérité du "OU" mathématique :

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

On voit que quand A et B sont vraies simultanément, on considère que $A \vee B$ est vraie aussi, c'est pour cela qu'on dit que c'est un OU inclusif.

Voici la table du vérité du " OU exclusif " nommé aussi "ou bien " plutôt utilisé dans le langage courant :

A	B	A ou bien B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

On voit que quand A et B sont vraies simultanément, le A "ou bien" B est considéré faux contrairement au "ou inclusif".

Exercice 1 corrigé sur le " OU "
(correction sur le site https ://laurencedipoi.wixsite.com/site)

Soit A et B deux assertions.
(1) Écrire la table de vérité de $\neg A \Rightarrow B$
(2) Comparer avec la table de vérité de $A \vee B$, conclusion ?

Comment montrer un " OU " ?
Montrer $A \vee B$ équivaut à montrer $\neg A \Rightarrow B$ donc on écrit que l'on suppose que $\neg A$ est vérifié puis on prouve que B est vrai avec cette hypothèse.

Propriété 3.1.7.
Soit deux assertions A *et* B*.*
(i) $\neg(A \wedge B)$ *est l'assertion* $(\neg A) \vee (\neg B)$
(ii) $\neg(A \vee B)$ *est l'assertion* $(\neg A) \wedge (\neg B)$

Exemple : $\neg(\forall x \in \mathbb{R},\ (x > 0) \vee (x < 0))$ est $\exists x \in \mathbb{R},\ (x \leq 0) \wedge (x \geq 0)$

3.2 Contraposée d'une implication, réciproque d'une implication, contraposée de la réciproque d'une implication

Propriété 3.2.1.
Soit deux assertions A *et* B*.*
(i) $A \Rightarrow B$ *n'a pas forcément les même valeurs de vérité que* $B \Rightarrow A$ *qui est appelée réciproque de* $A \Rightarrow B$*.*
(ii) $A \Rightarrow B$ *est équivalente à* $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ *qui est appelée contraposée de* $A \Rightarrow B$*.*
(iii) $B \Rightarrow A$ *est équivalente à* $(\neg A) \Rightarrow (\neg B)$

Exemple : " Il suffit de travailler pour avoir de bonnes notes"

(Je ne dis pas que cette phrase est vraie...)

Cette assertion peut se schématiser en " travailler $\Rightarrow$ bonnes notes"

Sa contraposée sera " ne pas avoir de bonnes notes $\Rightarrow$ ne pas travailler " et ça a le même sens que la phrase de départ, cela exprime exactement la même idée mais d'une autre façon.

Par contre, dire " ne pas travailler $\Rightarrow$ ne pas avoir de bonnes notes " est une toute autre idée, c'est la contraposée de la réciproque qui a le même sens que " bonnes notes $\Rightarrow$ travailler.

Exercice corrigé
(correction sur le site https ://laurencedipoi.wixsite.com/site)

Soit l'assertion $A\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ (x \notin \mathbb{Q}) \Rightarrow (1 + x \notin \mathbb{Q})$

w) Écrire la négation de A, la contraposée de A, la réciproque de A et la contraposée de la réciproque de A.

x) Démontrer par contraposée que A est vraie.

3.3 Opérations sur les ensembles

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Il y a quatre opérations ensemblistes très analogues aux connecteurs logiques :

1) L'intersection :

$$A \cap B = \{x \in E \ |(x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

A inter B c'est donc l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à la fois à A et à B.

2) La réunion :

$$A \cup B = \{x \in E \ |(x \in A) \vee (x \in B)\}$$

A union B c'est donc l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A ou (inclusif) à B.

3) Le complémentaire :

$$\complement_E A = \{x \in E \ |x \notin A\}$$

Le complémentaire de A dans E c'est donc l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

4) La différence :

$$A \backslash B = \{x \in E \ |(x \in A) \wedge (x \notin B)\} = A \cap \complement_E B$$

La différence A privée de B est donc l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B.

Comment reformuler dans la pratique un complémentaire $\complement_E A$? On écrit d'abord l'ensemble A en $\{u \in E \mid \textit{condition sur } u\}$ quitte à ce que la condition soit existentielle si au départ A était écrit sous forme paramétrique. Il ne reste plus qu'à écrire $\complement_E A = \{u \in E \mid \neg(\textit{ condition sur } u)\}$

Ex 1 : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 12y + 3z = 2\}$; $\complement_{\mathbb{R}^3} F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 12y + 3z \neq 2\}$
Ex 2 : $G = \{(2x - 3, 4 - x) \ ; x \in \mathbb{R}\}$.

On peut reformuler en $G = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \exists x \in \mathbb{R}, u = (2x-3, 4-x)\}$

Ainsi, $\complement_{\mathbb{R}^3} G = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in \mathbb{R}, u \neq (2x-3, 4-x)\}$

Comment reformuler dans la pratique un ensemble $F \cap G$ sans symbole $\cap$?
On déclare une variable parlante non affectée de F (ou de G si c'est plus facile par exemple s'il est en forme ; type) puis on analyse ce que veut dire pour cette variable être dans l'intersection.
On fait très attention aux variables muettes des ensembles ...

Exemple 1

Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ et $G = \{(2x, -x, 0, x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$

Déterminer $F \cap G$.

Exemple 2

Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x-y+3z+t = 4\}$.

Déterminer $F \cap G$.

Exemple 3

Soit $F = \{(t+3, -t+2, 2t+5)\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(2t-4, 3t+2, t-2) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Déterminer $F \cap G$.

Exemple 4

Soit $F = \{(4t+2, -7t+1, -2t-3)\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(-t-5, 4t+2, -2t+13) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Déterminer $F \cap G$.

Chapitre 3 : Connecteurs logiques, opérations sur les ensembles

Exercice 12 :

Voici des phrases en langage courant. Dire en justifiant rapidement si ces phrases sont vraies ou fausses d'après les règles de logique et énoncer en langage courant la négation logique de la phrase.

a) Si Poitiers est dans le sud de la France, alors 12= 6.

b) Soit Poitiers est dans le sud de la France, soit 12=6.

c) Soit 12=6, soit les chats ont 4 pattes.

d) Si l'homme est un quadrupède, alors il parle.

e) Si Poitiers est dans l'ouest de la France alors 12=6.

f) Si Poitiers est dans l'Ouest de la France, alors 12 est pair.

Exercice 13 :

Notons E l'ensemble des étudiants, S l'ensemble des jours de la semaine et pour un étudiant x on note $h_j(x)$ son heure de réveil le jour j.

a) Écrire avec des symboles mathématiques la proposition :

« Tout étudiant se réveille au moins un jour de la semaine avant 8 h »

b) Écrire la négation de cette proposition avec des symboles mathématiques puis en français.

Exercice 14 :

Pour chacune des propositions suivantes écrire la négation puis décider laquelle des deux est vraie et faire la preuve.

a) (24 est un multiple de 12) $\wedge$ (2 divise 167)

b) $\exists x \in \mathbb{R} \mid ((x-12=0) \wedge (x-2=0))$

c) $(\exists x \in \mathbb{R} \mid x-12=0) \wedge (\exists x \in \mathbb{R} \mid x-2=0)$

Exercice 15 :

Soit l'assertion $P : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x+y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \Rightarrow (x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \vee (y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$

a) (i) Écrire la contraposée de P

(ii) Montrer que P est vraie par contraposée.

(iii) Écrire la négation de P.

b) (i) Écrire la contraposée de la réciproque de P.

(ii) Écrire la négation de la contraposée de la réciproque de P. Comparer avec la négation de la réciproque.

(iii) Montrer que la réciproque de P est fausse.

Exercice 16 :

Soit l'assertion P :

$$\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall (y,z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*, z - xy = 0$$

a) Montrer que P est fausse en prouvant que sa négation est vraie.
b) Montrer de nouveau que P est fausse avec une démonstration par l'absurde.

Exercice 17 :

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire en langage math l'assertion " n est le carré d'un entier ".

b) Écrire en langage math l'assertion " si un entier n non nul, quel qu'il soit, est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier ".

Faire la preuve de cette assertion.

c) Écrire la négation de cette assertion.

Comment reformuler dans la pratique un ensemble $F \cap G$ sans symbole $\cap$?
On déclare une variable parlante non affectée de F (ou de G si c'est plus facile par exemple s'il est en forme ; type) puis on analyse ce que veut dire pour cette variable être dans l'intersection.
On fait très attention aux variables muettes des ensembles ...

Exemple 1

Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0\}$ et $G = \{(2x, -x, 0, x) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$
Déterminer $F \cap G$.

Exemple 2

Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0\}$ et $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + 3z + t = 4\}$.
Déterminer $F \cap G$.

Exemple 3

Soit $F = \{(t+3, -t+2, 2t+5) \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(2t-4, 3t+2, t-2) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
Déterminer $F \cap G$.

Exemple 4

Soit $F = \{(4t+2, -7t+1, -2t-3) \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(-t-5, 4t+2, -2t+13) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
Déterminer $F \cap G$.

Chapitre 4

Sommes finies, symbole Σ

4.1 Présentation du symbole $\sum$ et écriture en expansion

Définition 4.1.1.
Soit une suite de termes réels ou complexes $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$*, soit* n_0 *et* n *deux entiers naturels avec* $n_0 \leq n$*.*
La notation $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k$ *désigne la somme de tous les termes* u_k *en partant de* $k_{min} = n_0$ *jusqu'à* $k_{max} = n$*.*
L'écriture dite en expansion de la somme est donc :

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \ldots u_{n-1} + u_n$$

Quand on écrit $\sum_{k=n_0}^{n} u_k$ *les occurrences des variables* n_0 *et* n *sont parlantes (elles ont été déclarées avant) contrairement à l'indice* k *qui est muet.*
L'indice n_0 *du bas est l'indice* k_{min} *qu'on utilise pour débuter une écriture en expansion de la somme. Ensuite on parcourt toutes les valeurs de* k *jusqu'à l'indice* n *du haut de la somme qui est l'indice de fin* k_{max} *utilisé pour l'écriture en expansion.*
Il y a $n - n_0 + 1$ *termes à écrire si on formule en expansion la somme.*

Exercice corrigé sur l'écriture en expansion.
(correction sur le site https ://laurencedipoi.wixsite.com/site)

Écrire en expansion les sommes suivantes et vérifier que vous avez le bon nombre de termes :

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} u_k$ avec $u_k = 3 \times 5^k$; 2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} u_k$ avec $u_k = \frac{2k}{2k+1}$

3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} u_k$ avec $u_k = (-1)^k k^2$;

4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} u_k$ avec $u_k = (-1)^k k^2$ si k est pair et $u_k = 0$ si k impair.

5) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ avec $u_k = \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

6) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{k=0}^{n} u_k$ avec $u_k = \frac{(-1)^k n}{2k+1}$.

7) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{k=0}^{n} u_k$ avec $u_k = 12$.

4.2 Passage d'une somme en expansion en $\sum$

On va utiliser $\sum$ quand on veut écrire une somme avec beaucoup de termes, ou bien avec n termes où n est variable parlante non affectée. Mais il faut aussi et surtout, qu'il y ait une suite logique des termes, qu'ils puissent "répondre" à une formule u_k avec $k \in \mathbb{N}$. On commence par trouver une formule qui convient pour les termes puis on repère k_{min} et k_{max}.

Quelques structures usuelles à automatiser :

• Pour des entiers consécutifs on utilise k tout simplement.
Par exemple $S = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12$ se formule en ...

• Une alternance régulière de signe + - + - ... répond à la formule $(-1)^k$ ou $(-1)^{k+1}$ ou $(-1)^{k-1}$. Par exemple, la suite d'entiers -1 ; 2 ; -3 ; 4 ; -5 ; peut se formuler en ......et donc la somme $S = -1 + 2 - 3 + 4 - 5$ peut se formuler en ...

• Un entier pair répond à la formule usuelle $2k$ où k est un entier.
Par exemple, les entiers pairs entre 1 et 58 peuvent être formulés en ......et donc la somme des entiers pairs entre 1 et 58 se formule en ......

• Un entier impair répond à l'une des formules usuelles $2k + 1$ ou $2k - 1$.
Par exemple, les entiers impairs entre 1 et 58 peuvent être formulés en ......et donc la somme des entiers impairs entre 1 et 58 se formule en ...

• Une formule du type $\lambda.q^k$ où q est une constante non nulle et différente de 1 et λ constante non nulle est une formule dite géométrique. On repère du géométrique quand on passe d'un terme au suivant en multipliant par une valeur constante q qui est appelé la raison du terme géométrique. La valeur λ s'ajuste en fonction de l'indice k_{min} avec lequel on veut commencer la somme.

Par exemple, la suite d'entiers 6 ; 12 ; 24 ; 48 ; 96 ; C'est une suite géométrique où l'on passe d'un terme au suivant en multipliant par $q = 2$. On a donc une formulation en $\lambda.2^k$. Si on veut démarrer la somme avec $k_{min} = 0$ alors on prendra $\lambda = 6$ et on aura la formule 6×2^k, si on veut démarrer avec $k_{min} = 1$ on posera $\lambda = 3$ et on aura la formule 3×2^k.

Notons qu'une structure q^{k+r} avec $r \in \mathbb{Z}$ constante se reformule en $q^r q^k$, c'est donc encore du géométrique.

• Une structure arithmétique se formule en $a + kr$ où a et r sont constants. On repère de l'arithmétique quand on observe qu'on passe d'un terme à l'autre en ajoutant toujours la même valeur r. La valeur a s'ajuste selon l'indice k_{min} avec lequel on veut commencer la somme.

Par exemple pour la somme $S = 5 + 11 + 17 + 23 + 29$ on passe d'un terme à l'autre en ajoutant $r = 6$ à chaque fois on a donc une structure $a + 6k$ et si on veut démarrer la somme avec $k_{min} = 0$ alors on prend $a = 5$. Si on voulait démarrer la somme avec $k_{min} = 1$ alors on aurait pris $a = -1$.

Exercice corrigé sur l'écriture en $\sum$ à partir d'une expansion.
(correction sur le site https ://laurencedipoi.wixsite.com/site)

$S_1 = 1 + 3 + 5 + \cdots + 47\,;$ $\quad S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots + 625 - 626\,;$
$S_3 = -1 + 2 - 3 + 4 + \cdots - 625 + 626\,;$ $\quad S_4 = 12 + 16 + 20 + \cdots + 60 + 64$
$S_5 = 2 - 5 + 8 - 11 + \cdots + 32\,;$ $\quad S_6 = 5 + 10 + 20 + 40 + 80 + 160 + 320$
$S_7 = 4 - 12 + 36 - 108 + 324\,;$ $\quad S_8 = 8 + 3 - 2 - 7 - 12\,;$
$S_9 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{5} + \dfrac{6}{7} + \dfrac{8}{9} + \dfrac{10}{11} + \dfrac{12}{13}\,;$

4.3 Opérations usuelles avec $\sum$

- Somme de somme :

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

- Produit par une constante :
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé.

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k$$

- Relation de Chasles :
C'est quand on somme en plusieurs paquets au lieu d'un seul. Par exemple :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{n-2} a_k + \sum_{k=n-1}^{n} a_k$$

- Somme d'inégalités :
Soit n_0 et n deux entiers naturels avec $n_0 \leq n$.
Si $\forall k \in [[n_0; n]],\ u_k \leq v_k$ est vérifié alors $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{n} v_k$ sera vérifié aussi.

Exercice corrigé sur les opérations avec $\sum$.
(correction sur le site https ://laurencedipoi.wixsite.com/site)

1) On pose $\forall k \in \mathbb{N}^*, u_k = \dfrac{3}{k}$ et on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

a) Écrire en expansion w_1, w_2 et w_3 et comparer les du plus petit au plus grand.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $w_{n+1} - w_n$ à l'aide de la relation de Chasles. En déduire le signe de $w_{n+1} - w_n$ puis la monotonie de la suite (w_n).

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$. Reformuler la somme S_n suivante de façon à afficher deux sommes, l'une qui affiche comme terme $a_k = 3^k$ et l'autre qui affiche comme terme $b_k = 5^k$

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} (5 \times 3^{k+2} - 12 \times 5^{k-1})$$

3) Comparer en justifiant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

4) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$

5) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!k^2 - \sum_{j=2}^{n-1} j!j^2$

4.4 Sommes usuelles

- Somme arithmétique :

Soit (u_k) une suite arithmétique (On a donc une structure $a + kr$) La somme de termes consécutifs d'une telle suite est égale à la moyenne (demi-somme) du premier terme de la somme et du dernier terme de la somme, multipliée par le nombre de termes. Ainsi pas besoin de connaitre la raison pour calculer une telle somme, il suffit de savoir qu'elle est arithmétique.

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k = (n - n_0 + 1) \times \frac{u_{n_0} + u_n}{2}$$

En particulier, la somme arithmétique de terme $u_k = k$ se reformule en :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k &= 1 + 2 + \cdots + n \\ &= n\frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

- Somme géométrique :

Soit (u_k) une suite géométrique (On a donc une structure λq^k avec $q \neq 1$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=n_0}^{n} \lambda q^k &= \lambda q^{n_0} + \lambda q^{n_0+1} + \cdots + \lambda q^n \\ &= \lambda q^{n_0} \frac{1 - q^{n-n_0+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

Dans la pratique, pour calculer ces sommes, il suffit de retenir la reformulation suivante :

$$\sum_{k=n_0}^{n} x^k = \begin{cases} x^{n_0}\dfrac{1-x^{n-n_0+1}}{1-x} \text{ si } x \neq 1 \\ n-n_0+1 \text{ si } x=1 \end{cases}$$

- Somme télescopique :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n_0}^{n}(a_k - a_{k+1}) &= a_{n_0} - a_{n_0+1} + a_{n_0+1} - a_{n_0+2} + \cdots + a_{n-1} - a_n \\ &= a_{n_0} - a_{n+1} \end{aligned}$$

- Somme binomiale :

$$\text{Pour } a,b \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n}b^n \\ &= (a+b)^n \end{aligned}$$

Exercice corrigé sur les sommes usuelles.
(correction sur le site https ://laurencedipoi.wixsite.com/site)

Calculer sans symbole $\sum$ les sommes suivantes ($n \in \mathbb{N}$ est fixé) :

(i) $S_1 = \sum_{k=2}^{n}(3k-2)$; (ii) $S_2 = 2+8+14+20+\cdots+302$;

(iii) $S_3 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}$; (iv) $S_4 = \sum_{k=1}^{12} 5 \times 3^k$;

(v) $S_5 = \sum_{k=1}^{n} 5 \times (-2)^{k-2}$; (vi) $S_6 = \sum_{k=0}^{28} 3^k 2^{28-k}$; (vii) $S_7 = \sum_{k=0}^{28}\binom{28}{k}3^k 2^{28-k}$

(viii) $S_8 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}11^k$; (ix) $S_9 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}4^k(-2)^{n-k}$; (x) $S_7 = \sum_{k=0}^{28}\binom{29}{k}3^k 2^{28-k}$

4.5 Changement d'indice

Présentation du principe de changement d'indice

Exercice :

Soit $S = \sum_{k=1}^{6} a_k$, $T = \sum_{k=0}^{5} a_{k+1}$, $U = \sum_{k=2}^{7} a_{k-1}$. Comparer S, T et U.

Réponse :

Dans chacune de ces sommes, il y a 6 termes, il suffit de les écrire en expansion pour voir qu'elles sont toutes les trois égales à $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$.

Reprenons $S = \sum_{k=1}^{6} a_k$ et changeons le nom de l'indice dans T pour mieux comprendre : $T = \sum_{j=0}^{5} a_{j+1}$. Observons "l'intérieur" de ces deux sommes, dans S il y a a_k, dans T il y a a_{j+1}.

La somme T est une reformulation de S obtenue en posant $j+1=k$ c'est à dire $j=k-1$, on comprend alors que $k_{min}=1$ pour S correspond à $j_{min}=0$ pour T. Idem avec $k_{max}=6$ dans S qui donne $j_{max}=5$ sans T.

Dans la pratique on peut par exemple écrire :

$$S=\sum_{k=1}^{6} a_k \underset{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^{5} a_{j+1}$$

Cette reformulation est **le changement d'indice $j=k+1$.**

Souvent, comme l'indice est muet, on préfère (quand on commence à être expérimenté) ne pas changer le nom et écrire :

$$S=\sum_{k=1}^{6} a_k \underset{k:=k-1}{=} \sum_{k=0}^{5} a_{k+1}$$

On dit alors qu'on fait le changement d'indice $k:=k-1$.

Essayons la même analyse avec U : A l'intérieur de S il y a toujours a_k, tandis que dans U il y a a_{j-1}, on peut donc penser que l'on passe de S à U par le changement d'indice $k=j-1$ et en effet, pour $k=1$ dans S on trouve $j=2$ dans U et pour $k=6$ dans S on trouve $j=7$ dans U.

$$S=\sum_{k=1}^{6} a_k \underset{k:=k+1}{=} \sum_{k=2}^{7} a_{k-1}$$

Changements d'indices usuels

Translation d'indice

On peut toujours reformuler une somme indexée par k en posant $j=k+1$ ou $j=k-1$ ou $j=k+2$ ou $j=k-2$ etc ... plus généralement, $j=k+l$ où l est un entier relatif fixé, c'est une translation sur les indices.

"Renverser" l'ordre des termes d'une somme

En posant $j=n-k$ dans une somme du type $\sum_{k=n_0}^{n} u_k$ on "renverse" l'ordre des termes. Exemple : $S=\displaystyle\sum_{k=12}^{n} u_k = u_{12}+u_{13}+\cdots+u_n$. Avec le changement d'indice $j=n-k$ on reformule en $S=\sum_{j=0}^{n-12} u_{n-j}=u_n+u_{n-1}+\cdots+u_{12}$.

Reformuler une somme en disjonction pair/impair

On écrit $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{\substack{k=n_0\\ k\ pair}}^{n} u_k + \sum_{\substack{k=n_0\\ k\ impair}}^{n} u_k$

Puis on fait un changement d'indice $k=2p$ pour la somme des indices pairs et $k=2p+1$ ou $2p-1$ pour la somme des impairs.

Exercice corrigé sur changements d'indice.
(correction sur le site https ://laurencedipoi.wixsite.com/site)

1) Réécrire plus simplement les sommes suivantes en effectuant un changement d'indice :

a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{20}(j+4)$; b) $\displaystyle\sum_{k=12}^{204} 12^{k-10}$; c) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+6} x^{k-2}$; d) $\displaystyle\sum_{q=0}^{7} \frac{(q+2)^2}{4^{q+2}}$;

e) $\displaystyle\sum_{j=-6}^{18}(j+7)^2(j+7)!$

2) Reformuler la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{30} a_k x^k$ de façon à ce que l'écriture en expansion soit $a_{30}x^{30} + a_{29}x^{29} + \ldots a_0$

3) Calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{80} u_k$ avec $u_k = (-1)^p 3^{2p}$ si $k = 2p$ est pair et $u_k = (-7)^k$ quand k est impair.

Chapitre 4 : Le symbole Sigma pour les sommes finies

Exercice 18 :

a) Combien de termes dans $S = \sum_{k=2}^{1000} \frac{2k}{k^2+2}$?

Écrire le premier terme. Écrire le dernier terme. Écrire S en expansion.

b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Combien de termes dans $\sigma_p = \sum_{k=0}^{p} \ln(12+3k)$?

Écrire le premier terme. Écrire le dernier terme. Écrire S en expansion.

Exercice 19 :

Les sommes suivantes **ressemblent** à des sommes usuelles du cours, lesquelles ? (attention, il s'agit juste d'une ressemblance, on ne demande pas pour l'instant d'approfondir l'étude de la ressemblance) :

a) Soit n un entier supérieur ou égal à 3 et $S_n = \sum_{k=3}^{n}(5+3k)$

b) $S_b = \sum_{k=2}^{580}(5-7k)$;

c) Soit $p \in \mathbb{N}$ et $\sigma_p = \sum_{k=0}^{p} 7 \times 3^k$

d) $S_d = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 2^k (-3)^{100-k}$;

e) $S_e = \sum_{k=2}^{51} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$

f) $A_n = \sum_{k=0}^{n} \left(5 + \frac{k}{6}\right)$

g) Soit $p \in \mathbb{N}$ et $B_p = \sum_{k=0}^{p} 12 \times 6^{k-2}$

h) $S_h = \sum_{k=0}^{96} \frac{6}{5^{k+3}}$

i) $S_g = \sum_{k=0}^{96} \frac{-k}{12}$

j) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n}(3n-2)$

Exercice 20 :

a) Calculer $S_1 = \displaystyle\sum_{k=12}^{80}(3+2k)$.

b) Calculer $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{80}\left(-2+\frac{-k}{6}\right)$

c) Calculer $S_3 = -5-1+3+7+\cdots+395$

d) Calculer $S_4 = 3-2-7-\cdots-547$

Exercice 21 :

a) Calculer $S_1 = \displaystyle\sum_{k=2}^{80}3^k$.

b) Calculer $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{80}5\times(-2)^k$

c) Calculer $S_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}3\times 2^{k-1}$

d) Calculer $S_4 = \displaystyle\sum_{k=0}^{100}5\times(3)^{2k+1}$

e) Calculer $S_5 = 2+6+18+54+\cdots+28697814$ sachant que $\log_3(14348907) = 15$

Exercice 22 :

a) Calculer $S_a = \displaystyle\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}2^k(-3)^{100-k}$

b) Calculer $S_b = \displaystyle\sum_{k=0}^{112}\binom{112}{k}3^k$

c) Calculer $S_c = \displaystyle\sum_{k=0}^{31}\binom{32}{k}(-1)^k2^{33-k}$

Exercice 23 :

a) Calculer $S_a = \displaystyle\sum_{k=2}^{51}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$ en l'écrivant en expansion.

b) Refaire le calcul de S_a avec la propriété du cours dite " somme de somme " et un changement d'indice adapté à la translation $k+1$.

c) Soit $S_b = \displaystyle\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{2^{k-1}}-\frac{1}{2^k}\right)$

(i) A quelles sommes usuelles du cours S_b ressemble-t-elle (deux réponses attendues)

(ii) Calculer S_b grâce à la propriété "somme de somme" et un changement d'indice adapté à la translation $k-1$

Exercice 24 :

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $u_k = 2^p$ si $k = 2p$ est pair et $u_k = 2p - 3$ si $k = 2p + 1$ est impair.

a) Calculer $u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3$.

b) Soit $S = \sum_{k=0}^{301} u_k$

Calculer S grâce à la reformulation en "disjonction pair/impair".