

Chapitre 1

Nombres complexes

1.1 Forme algébrique d'un nombre complexe.

1.1.1 Définition et opérations simples (addition, multiplication)

Définition 1.1.1. On appelle ensemble des nombres complexes, et on note $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres de la forme $a + ib$ où a et b sont réels et i est un objet mathématique non réel qui vérifie $i^2 = -1$.

Un nombre de cet ensemble de la forme ib avec $b \in \mathbb{R}$ est appelé nombre imaginaire pur.

On a l'inclusion $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ puisqu'un réel s'écrit $a + 0 \times i$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Dans cet ensemble on définit une opération "+" et une opération "×" de la façon suivante :
 $(a + ib) + (x + iy) = (a + x) + i(b + y)$ et $(a + ib) \times (x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay)$

Dans la pratique, il suffit d'additionner et de multiplier des nombres complexes comme des réels en remplaçant i^2 par -1. Les identités remarquables sont aussi utilisables.

Exercice 1 corrigé en vidéo : ajouter et multiplier des complexes

Calculer $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$, z_1^2 et z_2^2 dans les cas suivants en présentant le résultat final sous la forme $a + ib$ avec a et b réels :

a) $z_1 = -1 + 3i$, $z_2 = 5 + 7i$

b) $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = -2 - 3i$

c) $z_1 = 12$, $z_2 = -2 + 3i$

Théorème 1.1.1.

Soit $z \in \mathbb{C}$.

(i) L'écriture $z = a + ib$ avec a et b réels **est unique**, elle est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z .

Le réel a de cette écriture est appelé partie réelle de z et noté $\text{Re}(z)$.

Le réel b de cette écriture est appelé partie imaginaire de z et noté $\text{Im}(z)$.

(ii) $z \in \mathbb{R} \iff \text{Im}(z) = 0$

(iii) z est imaginaire pur $\iff \text{Re}(z) = 0$

Exercice 2 corrigé en vidéo : forme algébrique

Mettre sous forme algébrique les nombres suivants en précisant leurs parties réelles et imaginaires :

a) $z_1 = -2(2 + i) + 5\left(\frac{-1}{2} + i\right)$; b) $z_2 = 2(\sqrt{3} + i) - 4(-\sqrt{3} - i)$

c) $z_3 = -\frac{3i}{4} \times \left(\frac{-1}{2}i + 2\right)$; d) $z_4 = (2 - i)(4 + i)(i - 1)$

1.1.2 Représentations dans le plan et dans le plan complexe.

Définition 1.1.2.

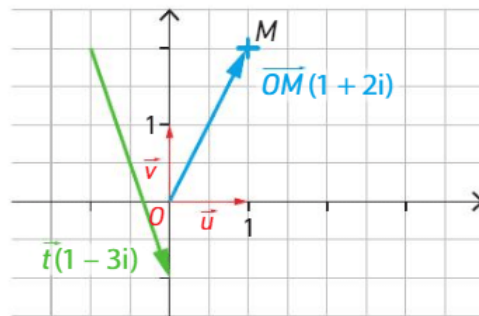
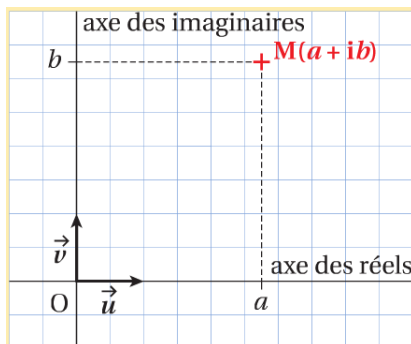
On considère le plan *muni d'un repère orthonormé direct*.

(i) Soit $z \in \mathbb{C}$ et $a = \operatorname{Re}(z)$, $b = \operatorname{Im}(z)$.

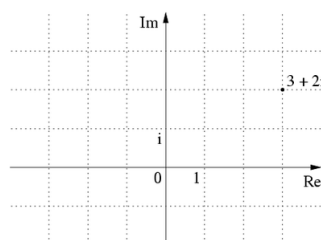
Le point $M(a, b)$ est appelé point image de z . Le vecteur $\vec{w}$ est appelé vecteur image de z .

(ii) Soit $M(a, b)$ un point du plan. Le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé affixe de M et on écrit $M(a + ib)$ au lieu de $M(a, b)$

(iii) Soit $\vec{w}(a, b)$ un vecteur du plan. Le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé affixe de $\vec{w}$ et on écrit $\vec{w}(a + ib)$ au lieu de $\vec{w}(a, b)$



On peut aussi "dessiner" directement un nombre complexe avec un axe horizontal gradué de 1 en 1 et un axe vertical gradué de i en i , le tout de façon orthonormée directe. On parle alors de plan complexe.



Propriété 1.1.1.

On considère le plan muni d'un repère orthonormé.

1) Soit A et B des points d'affixes respectives z_A et z_B . Alors :

(i) le vecteur $\vec{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$

(ii) le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe $\frac{1}{2}(z_A + z_B)$

2) Soit $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ des vecteurs d'affixes respectives z et z' . Alors :

(i) $\vec{w} + \vec{w}'$ a pour affixe $z + z'$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \vec{w}$ a pour affixe λz .

(iii) $z = z' \iff \vec{w} = \vec{w}'$

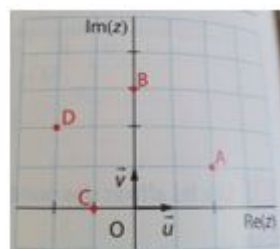
Exercice 3 corrigé en vidéo : affixe d'un point et d'un vecteur

a) Déterminer graphiquement les affixes des points

A, B, C, D et des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$

b) Retrouver les affixes de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ à partir des affixes des points A, B, C, D .

c) Le quadrilatère $ABCD$ est-il un parallélogramme ?

**Exercice 4 corrigé en vidéo plan complexe**

Dessiner dans le plan complexe les points $M(z)$ suivants :

a) $z = -1 + 3i$; b) $z = -1 - 2i$; c) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; d) $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

e) $z = i$; f) $z = -4$; g) $z = 5$;

Exercice 6 corrigé en vidéo : vecteurs colinéaires

a) Montrer que les points $A(-2 + 3i)$, $B(4 + 2i)$ et $C(-8 + 4i)$ sont alignés.

b) Peut-on affirmer quelque chose de plus au sujet de ces points ?

1.1.3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 1.1.3. Soit $z \in \mathbb{C}$, $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$.

Le conjugué de z , noté $\bar{z}$ est le complexe $\bar{z} = a - ib$. Géométriquement, c'est la symétrique de $M(z)$ par rapport à l'axe des abscisses.

Ex1 : $\overline{3 - 2i} = 3 + 2i$; $\overline{i - 12} = -i + 12$; $\overline{-2i} = 2i$; $\overline{12} = 12$

Propriété 1.1.2.

(i) $\forall z \in \mathbb{C}, z\bar{z} = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$

(ii) $\forall z \in \mathbb{C}, (z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)) \wedge (z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z))$

(iii) $\forall z \in \mathbb{C}, (z \in \mathbb{R}) \iff (z - \bar{z} = 0)$

(iv) $\forall z \in \mathbb{C}, (z \in i\mathbb{R}) \iff (z + \bar{z} = 0)$

Preuve de la propriété en vidéo

Exercice 6 corrigé en vidéo : manipulation du conjugué

- 1) Calculer le plus rapidement possible $z\bar{z}$ pour les valeurs de z suivantes :
- a) $z = 3 + 2i$; b) $z = 1 - 4i$; c) $z = -i + 5$; d) $z = -3i$; e) $z = 5$;
f) $z = -2 - 2i$
- 2) Dessiner dans le plan complexe les nombres de la question 1) ainsi que leur conjugué.
- 3) Compléter les égalités suivantes sans poser les calculs ($\theta \in \mathbb{R}$) :
- a) $(1 - 3i)(1 + 3i) =$; b) $(-2 + i)(-2 - i) =$; c) $(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta) =$

Propriété 1.1.3.

(i) Tout nombre complexe $z \neq 0$ admet un inverse (c'est à dire un complexe z' tel que $zz' = 1$) noté $\frac{1}{z}$ défini par :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$$

(ii) L'existence de l'inverse permet de définir des quotients de nombres complexes :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, \quad \frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$$

Exercice 7 corrigé en vidéo : donner la forme algébrique d'un quotient

- 1) Déterminer le plus rapidement possible sous forme algébrique les inverses des nombres suivants :
- a) $z = 3 + 2i$; b) $z = 1 - 4i$; c) $z = -i + 5$; d) $z = -3i$; e) $z = 5$;
f) $z = -2 - 2i$
- 2) Écrire les nombres suivants sous forme algébrique, le plus rapidement possible.
- a) $\frac{i}{1+i}$; b) $\frac{1}{i}$; c) $\frac{2+i}{3i}$; d) $\frac{1+3i}{2-i}$; e) $\frac{4}{i-1} - \frac{4}{i+1}$; $\frac{1-5i}{2-i}$

Les deux propriétés suivantes sont explicitées en vidéo :

Propriété 1.1.4.

La conjugaison "passe" à l'addition, la soustraction, au produit (et donc aux exposants entiers), au quotient :

(i)

(ii)

(iii)

(iv)

(v)

Voici une liste de propriétés usuelles à automatiser, certaines ont déjà été citées :

Propriété 1.1.5.

Soient z et u deux nombres complexes, alors :

(i) $z^2 - u^2 = (z - u)(z + u)$ (différence de carrés, déjà connue dans $\mathbb{R}$)

(ii) $z^2 + u^2 = (z - iu)(z + iu)$ (somme de carrés, une nouvelle factorisation spécifique aux complexes)

(iii) $(z + u)^2 = z^2 + 2zu + u^2$ (comme dans $\mathbb{R}$)

(iv) $\sum_{k=n_0}^n z^k =$ (somme géométrique, comme dans $\mathbb{R}$)

(v) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k u^{n-k} = (z + u)^n$ (somme binomiale, comme dans $\mathbb{R}$)

(vi) $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$

(vii) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$

(viii) $zu = 0 \iff z = 0$ ou $u = 0$.

En particulier si $z \neq 0$, toute égalité $zu_1 = zu_2$ implique l'égalité $u_1 = u_2$

(ix) $z = u \iff \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(u)$ et $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(u)$ (pour se ramener à un système de deux équations dans $\mathbb{R}$ au lieu d'une équation dans $\mathbb{C}$)

ATTENTION : il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$ ($\leq$ ou $\geq$), en particulier un complexe n'a pas de signe.

Exercice 8 corrigé en vidéo : utiliser OU PAS la forme algébrique

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

a) $2iz + 4 = -3z + i$; b) $z + 2\bar{z} = 3 - 4i$

Exercice 9 corrigé en vidéo

Soit $E = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 - \bar{z} \in \mathbb{R}\}$.

a) Déterminer E (c'est à dire reformuler E pour qu'il puisse être identifiable géométriquement) en utilisant la forme algébrique des complexes.

b) Déterminer E de nouveau en utilisant cette fois l'item (iii) de la propriété 1.2.

1.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1.2.1 Angles orientés et non orientés

Définition 1.2.1.

Un angle non orienté (ou encore secteur angulaire) est une partie du plan délimitée par deux demi-droites de même origine, mathématiquement un angle non orienté est donc une **surface** infinie.

Un angle non orienté possède une seule mesure qui est, en radian, la longueur de l'arc de cercle de rayon 1 délimité par les deux demi-droites.

Définition 1.2.2.

Un angle orienté est un couple **ordonné** de deux demi-droites de même origine.

Un angle orienté possède une infinité de mesures qui sont toutes égales modulo 2π .

Quand on parle du cosinus ou du sinus d'un angle c'est un abus de langage usuel, il s'agit en réalité du cosinus ou du sinus d'une des mesures de l'angle orienté.

Exercice 10

a) Dessiner avec les conventions usuelles un angle θ non orienté usuel et donner sa mesure (en radian).

b) Dessiner avec les conventions usuelles quelques angles orientés usuels et donner leurs mesures en radians.

c) Vrai ou faux : " Il y a deux angles solutions de l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$; ce sont les angles $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{-\pi}{3}$ "

1.2.2 La fonction exponentielle trigonométrique.**Définition 1.2.3.**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors la notation $e^{i\theta}$ désigne le nombre complexe $\cos \theta + i \sin \theta$. Le point $M(e^{i\theta})$ est situé sur le cercle trigonométrique et vérifie $(\vec{i}, \vec{OM}) = \theta \pmod{2\pi}$.

L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$
 $\theta \longmapsto e^{i\theta}$ est appelé fonction exponentielle trigonométrique.

Attention, la fonction exponentielle trigonométrique est très différente de la fonction exponentielle réelle vue en terminale, elle n'est pas définie pareil, elle renvoie des valeurs complexes qui n'ont pas de signe etc ...

La lettre i de la notation $e^{i\theta}$ permet de voir qu'on a affaire à l'exponentielle complexe et pas à l'exponentielle réelle.

Exercice 11

1) Dessiner dans le plan complexe les nombres suivants :

a) $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$; b) $z_2 = e^{i\frac{-\pi}{6}}$; c) $z_3 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$; d) $z_4 = e^{i\frac{\pi}{2}}$; e) $z_5 = e^{i\pi}$; f) $z_6 = e^{i0}$

2) Donner la forme algébrique de tous ces nombres.

3) Reformuler les nombres suivants sous la forme $e^{i\theta}$ avec $\theta \in [-\pi; 2\pi]$:

a) $u_1 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $u_2 = -i$; c) $u_3 = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$; d) $u_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

e) $u_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) Peut-on écrire le nombre $u = 3 + 2i$ sous la forme $u = e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$?

Propriété 1.2.1.

(i) la fonction $f(\theta) = e^{i\theta}$ est 2π -périodique :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, e^{i\theta} = e^{i(\theta + k2\pi)}$$

(ii) $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta = \theta' [2\pi]$

Exercice 11

1) Soit $z_1 = e^{i\frac{2021\pi}{3}}$.

(i) Pourquoi peut-on dire très rapidement, juste par observation, que dans le plan complexe z_1 est sur le cercle trigonométrique ?

(ii) Peut-on préciser, juste par observation, la place exacte de z_1 sur ce cercle ?

(iii) Poser la division euclidienne de 2021 par 6 et en déduire que $\frac{2021}{6} = 336 + \frac{5}{6}$.

En remarquant que $\frac{2021\pi}{3} = \frac{2021}{6}2\pi$, trouver une reformulation de $z_1 = e^{i\frac{2021\pi}{3}}$ sous la forme $e^{i\theta}$ mais avec une valeur θ beaucoup plus petite...

(iv) Dessiner dans le plan complexe le nombre z_1 et donner sa forme algébrique.

2) En s'inspirant de l'exemple 1), dessiner les nombres suivants et donner leur forme algébrique sous la forme la plus réduite possible :

a) $z_2 = e^{i\frac{2022\pi}{5}}$; b) $z_3 = e^{i\frac{-537\pi}{4}}$; c) $z_4 = e^{i2028\pi}$; d) $z_5 = e^{i1257\pi}$;

Exercice 12

Résoudre l'équation (E) : $e^{i\theta} = e^{-i\frac{\pi}{12}}$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

1.2.3 Module et arguments, forme trigonométrique**Définition 1.2.4.**

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $M(z)$ le point d'affixe z associé dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(i) Le réel $\sqrt{z\bar{z}}$ correspond à la distance OM . Ce réel est appelé module de z et on le note $|z|$. Ainsi pour $\alpha > 0$, l'ensemble des points z solutions de $|z| = \alpha$ forme dans le plan complexe le cercle de centre O et de rayon α .

(ii) Si $z \neq 0$, une mesure θ de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{OM})$ est appelé UN argument de z . Ainsi LES arguments de z sont les valeurs $\theta[2\pi]$.

Exercice 13 : Calcul de modules en utilisant la définition

Calculer les modules des nombres suivants :

a) $z_1 = 1 + i$; b) $z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6}$; c) $z_3 = i$; d) $z_4 = -12$; e) $z_5 = 4 - i$;
f) $z_6 = 3\sqrt{2} + i\sqrt{6}$; g) $z_7 = e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Propriété 1.2.2.

- (i) $\forall z \in \mathbb{C}, |z| = |\bar{z}| = |-z|$
(ii) $\forall z, z' \in \mathbb{C}^2, |zz'| = |z||z'|$
(iii) $\forall z, z' \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$
(iv) $\forall z \in \mathbb{C}^*, \forall n \in \mathbb{Z}, |z^n| = |z|^n$
(v) Si $z \in \mathbb{R}$, alors le module de z c'est tout simplement la valeur absolue de z .

Exercice 14 : Calcul de modules en utilisant les propriétés

Calculer les modules des nombres suivants :

a) $z_1 = 5e^{i\frac{2009\pi}{6}}$; b) $z_2 = -12e^{i\frac{2015\pi}{6}}$; c) $z_3 = \frac{1+i}{1-i}$; d) $z_4 = \frac{1}{2-i}$; $z_5 = (3+i)^5$;

Théorème 1.2.1.

- (i) Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ l'un de ses arguments. Alors $z = |z|e^{i\theta}$.
(ii) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. N'importe quelle écriture de z sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est appelée UNE forme trigonométrique de z . Dans une telle écriture on a forcément $r = |z|$ et θ qui est un argument de z .

Attention : L'écriture sous forme trigonométrique n'est pas unique, en particulier, on ne dira pas "l'argument" de z mais "un des arguments" de z . Dans les calculs, des grandes mesures d'angle peuvent parfois apparaître, mais le résultat final doit toujours être exprimé avec un argument de taille "raisonnable", c'est à dire entre -2π et 2π .

Exercice 15 : Mettre sous forme trigonométrique avec un argument pas trop grand

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants avec un argument entre $-\pi$ et π :

a) $z_1 = 3e^{i\frac{2009\pi}{6}}$; b) $z_2 = -5e^{i\frac{2015\pi}{6}}$; c) $z_3 = 1+i$; d) $z_4 = 1-\sqrt{3}i$; e) $z_5 = 1-i$;
f) $z_6 = 12$; g) $z_7 = -12$; h) $z_8 = i$; i) $z_9 = \sqrt{3}-i$; j) $z_{10} = -12i$;

Si on a posé une notation exponentielle pour la quantité $\cos \theta + i \sin \theta$ c'est que cela facilite les calculs puisque les règles sur cette exponentielle sont "identiques" aux règles des puissances, comme on va beaucoup manipuler les formes trigonométriques il faut bien connaître les règles suivantes :

Propriété 1.2.3.

Soient $\alpha, \theta, r_1, r_2, r_3$ cinq réels, alors :

- (i) $r_1 e^{i\theta} r_2 e^{i\alpha} = r_1 r_2 e^{i(\theta+\alpha)}$
(ii) Si $r_2 \neq 0$, on a $\frac{r_1 e^{i\theta}}{r_2 e^{i\alpha}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta-\alpha)}$
(iii) Soit $n \in \mathbb{Z}$, alors $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$
(iv) Si $r < 0$, alors $re^{i\theta} = |r|e^{i(\theta+\pi)}$.
(v) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$
(vi) $|re^{i\theta}| = |r|$ (valeur absolue de r)
(vii) Si $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$, alors $r_1 e^{i\theta} = r_2 e^{i\alpha} \iff r_1 = r_2$ et $\exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \alpha + k2\pi$

ATTENTION : $(e^{i\alpha})^n$ n'est pas autorisé quand n est un nombre rationnel, en particulier, écrire $(e^{i\alpha})^{\frac{1}{12}} = e^{i\frac{\alpha}{12}}$ par exemple EST INCORRECT!!!!

Propriété 1.2.4.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Formules d'Euler :

$$(i) \cos a = \frac{1}{2}(e^{ia} + e^{-ia}) \quad (ii) \sin a = \frac{1}{2i}(e^{ia} - e^{-ia})$$

Factorisations par "la moyenne des arguments" :

$$(iii) e^{ia} + e^{ib} = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}} \quad (iv) e^{ia} - e^{ib} = 2i \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}$$

1.3 Quelle forme utiliser ?

Nous avons trois formes possibles pour écrire un nombre complexe :

z tout simplement

$x + iy$, la forme algébrique avec x et y réels.

$re^{i\theta}$ une forme trigonométrique avec $r \geq 0$ (pour inclure 0) et $\theta \in \mathbb{R}$.

1) Garder l'écriture avec z permet de n'avoir qu'une inconnue, c'est donc ce qu'il faut essayer le plus possible. On utilise alors les relations suivantes :

$$z\bar{z} = |z|^2 \quad z + \bar{z} = 2\mathcal{R}e(z) \quad z - \bar{z} = 2i\mathcal{I}m(z)$$

2) Il arrive que l'on ne puisse pas continuer à raisonner avec la seule lettre z , auquel cas il faut choisir entre forme algébrique et formes trigonométriques.

La forme algébrique est adaptée aux additions et aux soustractions, mais elle est peu pratique pour les multiplications, les quotients et par conséquent les exposants élevés, au contraire des formes trigonométriques.

Exercice 16

- 1) Calculer $(1 + i)^8$.
- 2) Résoudre l'équation $z^4 = 1$ d'inconnue z complexe.
- 3) Résoudre $z - 2\bar{z} = 3 - 2i$ d'inconnue z complexe.
- 4) Résoudre $3z - 3i = 2z - 5 + i$ d'inconnue z complexe.

1.4 Racines carrées dans $\mathbb{C}$

Il existe la fonction racine carrée, définie sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, vous connaissez la formule depuis le collège et la fonction depuis le lycée, elle se note $\sqrt{x}$ avec le symbole radical, c'est la bijection réciproque de l'application carrée de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

Prenons maintenant $u = -12$; Alors racine carrée de -12 au sens de la fonction $\sqrt{}$ n'existe pas, on n'a pas le droit de l'écrire, pourtant on pourra vous demander en exercice de donner les racines carrées complexes de -12, il s'agit alors de comprendre qu'on vous demande deux nombres complexes, z_1 et z_2 qui vérifient $z_i^2 = -12$, ces deux nombres sont $z_1 = i\sqrt{12}$ et $z_2 = -i\sqrt{12}$.

Définition 1.4.1. Les racines carrées d'un nombre complexe u fixé sont définies comme les solutions de l'équation

$$z^2 = u$$

Propriété 1.4.1.

Soit u un nombre complexe non nul. Alors :

(i) $\sqrt{|u|}e^{i\frac{\arg(u)}{2}}$ est une racine carrée de u .

(ii) u possède deux racines carrées complexes et deux seulement et elles sont opposées. Ainsi, l'ensemble des racines carrées complexes de u est

$$\text{Rac}_2(u) = \{\sqrt{|u|}e^{i\frac{\arg(u)}{2}} ; -\sqrt{|u|}e^{i\frac{\arg(u)}{2}}\}$$

Exercice 17

Faire la preuve de la propriété.

Remarques :

Dans le cas particulier où u est un réel positif il n'est pas nécessaire d'utiliser son expansion trigonométrique pour produire l'ensemble de ses racines carrées, on a tout simplement

$$\text{Rac}_2(u) = \{\sqrt{u} ; -\sqrt{u}\}$$

De même, dans le cas particulier où u est un réel strictement négatif, il suffit d'observer $u = -|u| = \sqrt{|u|}^2 i^2$ pour en déduire que $i\sqrt{|u|}$ est une racine carrée évidente de u et donc

$$\text{Rac}_2(u) = \{i\sqrt{|u|} ; -i\sqrt{|u|}\}$$

Exercice 18

Donner le plus rapidement possible les racines carrées des nombres complexes suivants :

a) $3e^{i\frac{\pi}{8}}$; b) $-12e^{i\frac{\pi}{5}}$; c) $2 + 2i$; d) 12 ; e) -12

Comment dans la pratique trouver les racines carrées complexes de $u \in \mathbb{C}^*$ donné ?

Si u a une forme trigonométrique simple, alors on utilise la propriété ci-dessus et on obtient les racines carrées de u sous forme trigonométrique. C'est très rapide, c'est ce qui a été fait dans l'exercice 18.

Sinon, on résout l'équation (E) : $z^2 = u$ d'inconnue z complexe en écrivant que :

$$z^2 = u \iff \begin{cases} \text{Re}(z^2) = \text{Re}(u) \\ \text{Im}(z^2) = \text{Im}(u) \\ |z^2| = |u| \end{cases}$$

On combine ensuite les équations (1) et (3) et enfin on utilise l'équation (2) pour savoir si les parties réelles et imaginaires sont de même signe ou pas pour conclure.

Exercice 19

Déterminer les racines carrées de $2 - 3i$.

Corollaire

Tout équation polynomiale de degré 2, $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \neq 0$, admet une ou 2 solutions dans $\mathbb{C}$.

Plus précisément :

Théorème 1.4.1. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme $P(z) = az^2 + bz + c$, $a \neq 0$
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $P(z) = 0$ admet une seule solution dans $\mathbb{C}$: $z_0 = \frac{-b}{2a}$ et on a :

$$P(z) = a(z - z_0)^2$$

- Si $\Delta \neq 0$, l'équation $P(z) = 0$ admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$:

$$z_1 = \frac{-b + \delta_1}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \delta_2}{2a} \text{ où } \delta_1 \text{ et } \delta_2 \text{ sont les deux racines carrées complexes (opposées) de } \Delta.$$

$$\text{De plus : } P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$$

Exercice 20

Déterminer les solutions de l'équation $iz^2 + 2iz - 1 + i = 0$ et en déduire une factorisation du polynôme $P(z) = iz^2 + 2iz - 1 + i$

1.5 Racines n -ièmes d'un complexe

1.5.1 Racines n -ièmes réelles d'un nombre réel

Définition 1.5.1. Soit n un entier, ($n \geq 1$), et X un nombre réel. On appelle *racine n -ième réelle de X* tout nombre réel x vérifiant $x^n = X$.

Propriété 1.5.1.

- Si n est impair, alors tout X réel possède une unique racine n -ième réelle, cette racine est $x = X^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{X}$
- Si n est pair alors les reels X strictement négatifs n'ont pas de racine n -ième, $X = 0$ possède 0 comme unique racine n -ième et enfin les réels $X > 0$ ont deux racines n -ièmes opposées qui sont $x_1 = X^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{X}$ et $x_2 = -X^{\frac{1}{n}} = -\sqrt[n]{X}$

Exercice 21

Déterminer si elles existent les racines n -ièmes réelles demandées suivantes :

Racine cubique de -8 ? Racine cubique de 7 ?

Racine quatrième de -9 ? de 9 ?

1.5.2 Racines n -ièmes complexes d'un nombre complexe

Définition 1.5.2. Soit n un entier, ($n \geq 1$), et u un nombre complexe. On appelle **racine n -ième de u** tout nombre complexe z vérifiant $z^n = u$.

En particulier pour $u = 1$ on désigne par **racine n -ième de l'unité** toute solution de l'équation $z^n = 1$ et on note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble de ces solutions.

Théorème 1.5.1. *Pour tout entier $n \geq 1$, il y a n racines n -ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. Ce sont les nombres $e^{i2k\pi/n}$ pour $k = 0, 1 \dots n-1$ (ou plus généralement pour n valeurs consécutives de k).*

$$\mathbb{U}_n = \{e^{i2k\pi/n} ; k \in [[0; n]]\}$$

Exercice 21

Faire la preuve du théorème.

Propriété 1.5.2.

- le produit de deux racines n -ièmes de l'unité est aussi une racine n -ième de l'unité.
- L'inverse d'une racine n -ième de l'unité est aussi une racine n -ième de l'unité.
- La somme des n racines n -ièmes de l'unité est égale à 0.
- Les racines n -ièmes de l'unité sont les affixes des sommets d'un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle trigonométrique.

Exercice 22

Faire la preuve de cette propriété.

Propriété 1.5.3.

(i) Soit $u \in \mathbb{C}^*$. Alors $\sqrt[n]{|u|}e^{i\arg(u)/n}$ est une racine n -ième de u évidente.

(ii) Tout nombre complexe u non nul possède exactement n racines n -ièmes dans $\mathbb{C}$. Si on connaît une des racines z_0 , alors les autres racines z_k sont obtenues en multipliant z_0 par les racines n -ièmes de l'unité.

Exercice 23

1) Déterminer une racine 8-ième évidente de $u = 16e^{i\pi/7}$. En déduire l'ensemble des racines 8-ième de $u = 16e^{i\pi/7}$.

2) Déterminer l'ensemble des racines quatrièmes de $u = 2\sqrt{3} - 2i$

Exercice 24

Faire la preuve de la propriété 1.5.3

Chapitre 2

Injections, surjections

Image d'une application, composition de fonctions, composition d'applications.

Définition 2.0.1.

Soit E et F deux ensembles non vides. Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On appelle **image de f** et on note $\text{Im}f$ le sous ensemble de F définie par :

$$\text{Im}f = \{f(x) ; x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}$$

Rappelons que quand f est continue et que E est un intervalle, alors $\text{Im}f$ est un intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Exemple :

1) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 + 12 \end{array}$. Déterminer $\text{Im}f$.

2) $f : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$. Déterminer $\text{Im}f$.

3) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + 2, -y + 3, y - 12) \end{array}$. Déterminer $\text{Im}f$

On peut aussi parler de l'image d'une fonction, il faut bien comprendre alors que l'on demande l'image de l'application associée par défaut.

Exemple :

Donner l'image de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$.

Composition d'applications

Composition de fonctions usuelles

• Soit f et g deux fonctions usuelles de la variable réelle à valeurs réelles, comme vous en aviez l'habitude en terminale, on peut poser la fonction $f \circ g$, appelée **composée**, définie par :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

• On préfère à l'usage noter $f \circ g(x)$ plutôt que $(f \circ g)(x)$.

Exemple :

$$f(x) = \ln x, \quad g(x) = x^2 + 12$$

$$f \circ g(x) =$$

$$g \circ f(x) =$$

[2]

Exercice 1 :

Écrire les deux fonctions composées $f \circ g$ et $g \circ f$ pour les fonctions $f(x) = 1/x$ et $g(x) = x+1$ puis donner leur domaine de définition.

D'une certaine façon, $f \circ g$ c'est "l'enchaînement" de g suivi de f , c'est considéré comme une opération usuelle entre fonctions, au même titre que le produit, l'addition etc ...

On voit que l'on ne s'est pas posé de question pour composer dans l'exemple précédent, on a écrit $f(g(x))$ sans même se demander avant si on avait le droit de le faire. Si on "sort" du cadre des fonctions usuelles, alors on comprend vite qu'on ne peut pas composer toutes les formules entre elles :

Exemple :

$$f(x) = \ln x, \quad g((x, y)) = x^2 + 12y$$

Est-ce que $g \circ f$ a un sens ?

Est-ce que $f \circ g$ a un sens ?

Pour préciser la définition de composée on va donc travailler avec des applications.

Définition 2.0.2.

Soit $f : E \rightarrow F_1$ et $g : F_2 \rightarrow G$ deux applications.

Si $\text{Im} f \subset F_2$ alors on peut construire l'application composée $g \circ f$ définie par :

$$x \mapsto g(f(x))$$

Sinon $g \circ f$ n'est pas définie.

En effet, avoir $\text{Im}F \subset F_2$, c'est avoir $f(x)$ dans la source de g et donc c'est pouvoir calculer son image par g c'est à dire $g(f(x))$.

Exemple :

$$f(x) = \ln x, \quad g((x, y)) = x^2 + 12y$$

[2]a) Soit g_1 l'application par défaut associée à g et f l'application associée par défaut à f .
Peut-on définir $g \circ f$?

[2]b) Définir des applications associées à f et g de façon à avoir $f \circ g$ définie.

[2]

Exercice 2 :

$$\text{Soit } f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto x^2 + 12 \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto \sqrt{x}$$

Justifier que les applications $f \circ g$ et $g \circ f$ sont définies et explicitez-les.

Remarques :

- Attention à la concordance des ensembles qui justifie l'existence de $f \circ g$ ou pas.
- L'application $g \circ f$ peut être définie sans que $f \circ g$ ne le soit.
- Si les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ sont définies, on a en général $f \circ g \neq g \circ f$.
- Si E, F, G et H sont des ensembles et $f: E \rightarrow F$, $g: F \rightarrow G$ et $h: G \rightarrow H$ sont des applications, $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ sont deux applications de E dans H et on a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Applications surjectives, injectives, bijectives

Définition 2.0.3.

Soit $f: E \rightarrow F$ une application. Deux cas sont possibles :

- (i) $\text{Im}f = F$, c'est à dire que chaque objet t de l'ensemble d'arrivée possède au moins un antécédent et peut s'afficher en $f(u)$ avec $u \in E$ la source, on dit alors que f est surjective.
- (ii) $\text{Im}f \neq F$, c'est à dire que parmi les objets t de l'ensemble d'arrivée, certains n'ont pas d'antécédent et ne peuvent pas être affichés en $f(u)$, on dit alors que f n'est pas surjective.

Exemple :

L'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f((x, y)) = x^2 + y^2$ est-elle surjective ?

L'application h de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par $h((x, y)) = x^2 + y^2$ est-elle surjective ?

L'application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$ est-elle surjective ?

L'application k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par $k(x) = x^2$ est-elle surjective ?

L'application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^-$ définie par $\varphi(x) = x^2$ est-elle surjective ?

Définition 2.0.4.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Deux cas sont possibles :

(i) On peut trouver deux objets distincts de la source E qui ont la même image :

$$\exists u, v \in E, (u \neq v) \text{ et } (f(u) = f(v))$$

On dit alors que f n'est pas injective. Cela revient aussi à dire que parmi les objets t de l'ensemble d'arrivée F , il y en a qui ont plusieurs antécédents.

(ii) Les objets de la source E ont tous des images différentes :

$$\forall u, v \in E, (f(u) = f(v)) \Rightarrow u = v$$

On dit alors que f est injective. Cela revient à dire que chaque objet t de l'arrivée F , possède 0 ou 1 antécédent mais pas davantage.

Exemple :

L'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f((x, y)) = x^2 + y^2$ est-elle injective ?

L'application g de $\mathbb{R}^-$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$ est-elle injective ?

Comparaison injective/surjective :

Quand f est injective, un objet t de l'ensemble d'arrivée ne peut peut-être pas s'afficher comme $f(u)$ mais s'il le peut alors u est unique.

Quand f est surjective, chaque objet t de l'ensemble d'arrivée peut s'afficher comme $f(u)$ mais u n'est peut-être pas unique.

Rappelons qu'une application est bijective si et seulement si chaque élément de l'ensemble d'arrivée possède un et un seul antécédent par f (dans la source), ce qui revient à dire que chaque élément de l'ensemble d'arrivée peut s'afficher de façon unique en $f(u)$ avec u dans la source...

Propriété 2.0.1.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

$$(f \text{ bijective}) \iff (f \text{ surjective et injective})$$

Image de sous-ensemble et image réciproque**Définition 2.0.5.**

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

(i) Soit $A \subset E$. Alors l'ensemble appelé image de A et noté $f(A)$ est défini par

$$f(A) = \{f(a) ; a \in A\} = \{t \in F \mid \exists a \in A, t = f(a)\}$$

(ii) Soit $B \subset F$. Alors l'ensemble appelé image réciproque de B et noté $f^{-1}(B)$ est défini par

$$f^{-1}(B) = \{u \in E \mid f(u) \in B\}$$

Attention : la notation choisie pour l'image réciproque semble afficher f^{-1} mais en vérité, c'est le bloc $f^{-1}(B)$ qui est affiché, il se peut que f ne soit pas bijective et donc afficher f^{-1} "tout seul" n'a pas de sens.

Quand B est un singleton $\{b\}$ déterminer $f^{-1}(B)$ est équivalent à déterminer les antécédents de b .

Dans la pratique, quand on veut déterminer des images réciproques d'ensemble ou des images d'ensemble, on commence en écrivant leur définition ensembliste donnée ci-dessus et en la personnalisant, puis éventuellement on fixe un élément dans l'ensemble ambiant et on analyse ce que veut dire pour cet élément l'appartenance au sous-ensemble étudié.

Exemple :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (2x - y, x + 12y, 3x)$

a) L'application f est-elle surjective ? Est-elle bijective ?

b) $A = \{(x, 2x) ; x \in \mathbb{R}\}$. Déterminer $f(A)$

c) Soit $B = \{(0, 0, 0)\}$. Déterminer $f^{-1}(B)$.

d) Soit $C = \{(x, 13x, 3x) ; \}$. Déterminer $f^{-1}(C)$.

Chapitre 3

Polynômes

Dans tout ce cours, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Polynômes formels vs fonction polynômiale

Définition 3.0.1.

On appelle **polynôme** formel à coefficients dans $\mathbb{K}$ un objet mathématique qui s'écrit sous la forme d'une somme finie :

$$a_0 + a_1X + \dots a_nX^n$$

où n est un élément de $\mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$, appelés coefficients du polynôme, et X un objet mathématique qui porte le nom **d'indéterminée** et qu'on n'a pas besoin de déclarer.

Une telle écriture (dite en expansion) du polynôme est unique.

L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$. (ou $\mathbb{K}[Y]$, $\mathbb{K}[Z]$ en cohérence avec la notation de l'indéterminée).

Quand l'indice n maximal de l'écriture en expansion vaut 0 on dit que le polynôme est constant. Le polynôme $P(X) = 0$ est appelé polynôme nul.

Quand P n'est pas le polynôme nul, l'indice n maximal de son écriture en expansion s'appelle le degré du polynôme et le coefficient a_n associé non nul s'appelle le coefficient dominant du polynôme. Quand le coefficient dominant vaut 1, on dit que le polynôme est unitaire.

Quand P est le polynôme nul, son degré vaut $-\infty$ par convention.

Exemple :

$P(X) = 1 + X + 12X^2$ est un polynôme formel à coefficients réels, on écrira $P \in \mathbb{R}[X]$. On a $\deg(P) = 2$ et P est écrit en expansion dans le sens des puissances croissantes. On pourrait l'écrire dans le sens des puissances décroissantes.

Manipulations usuelles des polynômes formels

(i) Addition, produit.

La manipulation des polynômes formels est très pratique, **on calcule avec les indéterminées comme avec des puissances normales**, les opérations d'addition et de multiplication

sont définies naturellement mais on n'a pas à se soucier des déclarations de variables puisque X n'est pas une variable. On dit qu'on fait du calcul **formel**.

Exemple :

- a) Soit $P(X) = 2X^2 - 3X + 4$ et $S(X) = X - 3$. Calculer $P + 2S$ et PS .
- b) Calculer $P^2(X)$.

(ii) La dérivation.

On définit aussi la notion de polynôme formel dérivé en posant $(X^k)' = kX^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ qui n'a rien à voir avec la théorie de la limite du taux de variation ...

Pour $P(X) = a_0$ avec $a_0 \in \mathbb{K}$ on dit que P est un polynôme constant et sa dérivée est nulle.

(iii) La notion de racines.

On a le droit de substituer l'indéterminée X par des valeurs de $\mathbb{K}$, comme si on manipulait une fonction polynomiale et non pas un polynôme formel. Par exemple pour $P(X) = X^2 - 3$ j'ai le droit d'écrire $P(1) = 1 - 3 = -2$. Du coup on récupère la notion de racines d'une fonction polynomiale vue au lycée, une racine réelle d'un polynôme P sera une valeur $a \in \mathbb{R}$ qui vérifie $P(a) = 0$ et une racine complexe de P sera une valeur $a \in \mathbb{C}$ telle que $P(a) = 0$.

Exemple :

- a) Quelles sont les racines réelles de $P(X) = X^2 - X - 3$?
- b) Quelles sont les racines complexes de $P(X) = X^2 + 1$?
- c) Donner un polynôme formel unitaire de degré 2 qui s'annule en 3 et -12 .

Vous verrez en deuxième année que l'indéterminée permet aussi de substituer X par autre chose que des valeurs de $\mathbb{K}$, des matrices par exemples ou des endomorphismes.

Règle sur les degrés des polynômes

Propriété 3.0.1.

Soient P et S deux éléments **non nuls** de $\mathbb{K}[X]$ (on peut donc parler de leur degré dans $\mathbb{N}$) et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :

- 1) $\deg(P + S) \leq \max(\deg(P), \deg(S))$ et il y a égalité quand les degrés de P et Q sont distincts
- 2) Si $\lambda \neq 0$, on aura $\deg(\lambda P) = \deg P$.
- 3) $\deg(PQ) = \deg P + \deg S$.
- 4) Si P est constante non nulle, alors P' est la fonction nulle, sinon on a $\deg P' = \deg P - 1$.
- 5) Si P est de degré n alors $P^{(n+1)}$ est la fonction nulle.

Remarque : Avec nos conventions, les assertions 1) 2) et 3) restent encore vraies lorsque P ou S est nulle.

Exemple :

- a) Quel est le degré du polynôme $P(X) = (3X - 2)(X + 5)$? Quel est son coefficient dominant ?
- b) Quel est le degré du polynôme $P(X) = (3X - 2)^5(X + 5)^{12}$? Quel est son coefficient dominant ?

c) Soit $P(X)$ un polynôme unitaire de degré 12 tel qu'il existe un autre polynôme $Q(X)$ vérifiant $P(X) = (2X^2 + 1)Q(X)$. Quel est le degré de $Q(X)$? Quelle est la valeur du coefficient dominant de $Q(X)$?

2. Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$: division et multiplicité d'une racine

Division euclidienne des fonctions polynomiales.

La théorie des polynômes met en évidence une ressemblance entre $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{Z}$. La clef de ce parallélisme est l'existence dans $\mathbb{K}[X]$ comme dans $\mathbb{Z}$ d'une division dite euclidienne. Comme dans $\mathbb{Z}$, cette division sera à la base de la plupart des propriétés de $\mathbb{K}[X]$.

Théorème 3.0.1. Division euclidienne des polynômes.

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec B non nul. Alors il existe deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, Q et R **uniques**, tels que :

$$A = QB + R \text{ et } R = 0 \text{ ou } \deg(R) < \deg(B)$$

Le polynôme Q est appelé **quotient** de la division euclidienne, R est appelé **reste** de la division.

Démonstration.

Unicité :

...

□

Exemple :

- a) Faire la division euclidienne de $A(X) = X^5 - X^4 - X^3 + 3X^2 - 2X$ par $B(x) = X^2 - X + 1$.
- b) Faire la division euclidienne de $A(X) = X^5 - 2X^4 - 3X^3 + X^2 - 2X + 1$ par $B(X) = X^3 - X + 1$
- c) Faire la division euclidienne de $A(X) = X + 3$ par $B(X) = X^2 + X + 12$.
- d) Faire la division euclidienne de $A(X) = 2X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 8X + 4$ par $B(X) = X^2 - X + 2$.

Diviseurs d'un polynôme

Définition 3.0.2.

Soit $A(X)$ un polynôme non constant.

On dit que $B(X)$ est un diviseur de $A(X)$ quand le reste de la division euclidienne de $A(X)$ par $B(X)$ est nul. On peut aussi dire que $B(X)$ divise $A(X)$ au lieu d'utiliser le nom commun diviseur.

Le polynôme $A(X)$ peut alors s'afficher sous forme factorisée polynomiale $A(X) = Q(X)B(X)$ où $Q(X)$ est le quotient de la division c'est en ce sens qu'on peut dire que $A(X)$ est multiple de $B(X)$.

Le nombre de diviseurs **unitaires** d'un polynôme est fini à cause du degré.

Dans ce cours, les diviseurs de $A(X)$ qui ont leur degré nul ou égal au degré de $A(X)$ seront appelés des diviseurs **triviaux** de $A(X)$. Les autres seront qualifiés de diviseurs non triviaux. Une factorisation polynomiale de $A(X)$ qui "affiche" au moins un diviseur non trivial de $A(X)$ sera qualifiée dans ce cours de **factorisation polynomiale non triviale**.

Exemple :

a) Soit $A(X) = 2X^2 - 4X + 2$. Alors $A(X) = 2(X^2 - 2X + 1)$ est une factorisation triviale de $A(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$. Par contre, $A(X) = 2(X - 1)^2$ est une factorisation polynomiale non triviale dans $\mathbb{R}[X]$ de $A(X)$.

Le polynôme $A(X)$ possède 3 diviseurs unitaires qui sont $D_1(X) = 1$ et $D_2(X) = X - 1$ et $D_3(X) = (X - 1)^2$. Le seul diviseur unitaire non trivial est $D_3(X)$.

b) Soit $A(X) = X^2 + 1$. Il n'existe pas de factorisation polynomiale non triviale de $A(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$ car son discriminant est strictement négatif. Par contre, on sait que $A(X) = (X - i)(X + i)$ dans $\mathbb{C}[X]$ qui est une factorisation polynomiale non triviale.

Ainsi dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $A(X)$ n'a pas de diviseur non trivial alors que dans $\mathbb{C}[X]$ il possède deux diviseurs unitaires non triviaux.

c) Montrer que si un polynôme $A(X)$ admet une factorisation non triviale, alors son degré est supérieur ou égal à 2.

Énoncer la contraposée de cette assertion.

Racines et diviseurs

Propriété 3.0.2.

Soit $P(X)$ un polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$ et soit $a \in \mathbb{K}$. Alors :

$$X - a \text{ divise } P(X) \iff a \text{ racine de } P(X)$$

Preuve :

Exemple :

Soit $P(X) = X^3 - 2X^2 + 3X - 2$.

- Trouver un diviseur non trivial de $P(X)$ en cherchant une racine réelle évidente.
- Déterminer la factorisation non triviale dans $\mathbb{R}[X]$ qui découle de votre diviseur.

Corollaire

- Si $a_1, a_2, \dots, a_k$ sont des racines distinctes dans $\mathbb{K}$ de $P \in \mathbb{K}[X]$ alors $(X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_k)$ divise $P(X)$ (et la réciproque est vraie aussi).
- Si a est un complexe non réel racine de $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $\bar{a}$ est aussi racine de $P(X)$ et $X^2 - 2\operatorname{Re}(a)X + |a|^2$ divise $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exemple :

1) Soit $P(X) = 2X^4 + X^3 + 3X^2 - X - 5$. Déterminer des racines évidentes de $P(X)$ et la factorisation qui en découle.

2) Soit $P(X) = 3X^4 + X^3 + 2X^2 + X - 1$. Montrer que i est racine complexe de P et déterminer la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ qui en découle.

Propriété 3.0.3.

Soit a une racine réelle ou complexe d'un polynôme $P(X)$ de $\mathbb{K}[X]$. Alors il existe un entier n non nul unique et un polynôme $Q(X)$ de $\mathbb{K}[X]$ unique qui n'admet pas a comme racine et tels que $P(X) = (X - a)^n Q(X)$.

L'entier n s'appelle la multiplicité de la racine a .

Quand $n = 1$ on dit que a est racine simple de $P(X)$.

Quand $n = 2$ on dit que a est racine double de $P(X)$.

Quand $n = 3$ on parle de racine triple.

Exemple :

a) Soit $P(X) = X^3 - 2X^2 + 3X - 2$ déjà étudié précédemment. Quelle est la multiplicité de la racine trouvée ?

b) Soit $P(X) = (X + 1)^3(X^2 - 1)$. Quelle est la multiplicité de la racine évidente $a = -1$ de $P(X)$?

Théorème 3.0.2. : Caractérisation de la multiplicité d'une racine

Soit a complexe ou réel et $P(X)$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On a les équivalences suivantes :

(i) a est racine **au moins de multiplicité** k de $P(X)$ si et seulement si elle vérifie le système de k équations $(P(x) = 0) \wedge (P'(x) = 0) \wedge \dots \wedge (P^{(k-1)}(x) = 0)$ d'inconnue x de même type que a .

(ii) a est racine **de multiplicité** k de $P(X)$ si et seulement si $(P(a) = P'(a) = \dots = P^{(k-1)}(a) = 0) \wedge (P^{(k)}(a) \neq 0)$.

Exemple :

1) Soit $P(X) = X^4 + 5X^3 + 9X^2 + 8X + 4$.

a) Déterminer une racine évidente de $P(X)$ ainsi que sa multiplicité.

b) Déterminer la factorisation non triviale de $P(X)$ qui découle de l'étude de cette racine.

2) Soit $P(X)$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que si a est racine complexe non réelle de P de multiplicité k alors $\bar{a}$ est aussi racine de $P(X)$ avec la même multiplicité. Quel diviseur réel de P découle de ces deux racines ?

3) Soit $P(X) = X^6 + X^5 + 4X^4 + 2X^3 + 5X^2 + X + 2$. Montrer que i est racine complexe de $P(X)$ et déterminer sa multiplicité ainsi que la factorisation qui en découle.

3. Factorisation primaire dans $\mathbb{K}[X]$.

Facteurs premiers dans $\mathbb{K}[X]$

La notion de facteurs premiers de $\mathbb{K}[X]$ est l'équivalent des nombres premiers dans $\mathbb{Z}$.

Définition 3.0.3. Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit *facteur premier* de $\mathbb{K}[X]$ (ou *irréductible* sur $\mathbb{K}$) quand :

- (i) il de degré supérieur ou égal à 1
- (ii) il peut pas s'écrire comme produit de deux polynômes de degrés supérieurs ou égaux à 1 (autrement dit avec les définitions de ce cours, il n'admet pas de diviseurs non triviaux)

Exemple :

a) $P(X) = 3X - 12$ est facteur premier de $\mathbb{R}[X]$ car on a montré précédemment qu'un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 n'a pas de diviseurs non triviaux.

b) $P(X) = X^2 + X + 1$ est facteur premier de $\mathbb{R}[X]$ car son discriminant est strictement négatif. Par contre ce n'est pas un facteur premier de $\mathbb{C}[X]$ car $X - j$ par exemple est diviseur non trivial de $P(X)$.

Théorème 3.0.3.

- (i) Les facteurs premiers de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1.
- (ii) Les facteurs premiers de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant négatif strictement.

La preuve de ce théorème est admise.

Factorisation primaire d'un polynôme

Théorème 3.0.4.

Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$ de coefficient dominant λ . Alors il existe des facteurs premiers $P_1, P_2, \dots, P_k$ de $\mathbb{K}[X]$ **unitaires, distincts** et des entiers positifs non nuls $n_1, n_2, \dots, n_k$, uniques tels que :

$$P = \lambda P_1^{n_1} P_2^{n_2} \dots P_k^{n_k}$$

Cette écriture est appelée factorisation primaire de $P(X)$ dans $\mathbb{K}[X]$ et elle est unique à l'ordre près.

Dans $\mathbb{C}[X]$ les facteurs premiers P_i seront tous de degré 1 tandis que dans $\mathbb{R}[X]$ ils pourront être de degré 1 mais aussi de degré 2 avec un discriminant strictement négatif.

Un entier n_i de la factorisation primaire est appelé la valuation en P_i du polynôme $P(X)$. On dit aussi que le facteur premier P_i a pour valuation n_i dans la factorisation primaire de $P(X)$.

La preuve de ce théorème est admise

Propriété 3.0.4. Soit $a \in \mathbb{K}$ une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors la multiplicité de a est la valuation en $X - a$ dans la factorisation primaire de $P(X)$.

Exemple :

Soit $P(X) = 3X^4(X - 1)(X^2 + 1)^5$.

C'est la factorisation primaire de $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$ car on observe trois facteurs premiers à savoir X , $X - 1$ et $X^2 + 1$ qui ont pour valuation respective 4, 1 et 5. Il n'y a aucun autre facteur. On en déduit donc que 0 est une racine de multiplicité 4 de $P(X)$ puisque la valuation en X est 4 et que 1 est racine simple de $P(X)$.

Théorème 3.0.5. Théorème de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

En effet, la factorisation primaire d'un polynôme non constant dans $\mathbb{C}[X]$ fait apparaître au moins un polynôme de degré 1 qui va s'annuler. on a donc au moins une racine.

Remarque : ce théorème apparaît dans ce cours comme une conséquence du théorème de factorisation primaire mais c'est en fait le contraire ! En effet, le théorème de d'Alembert-Gauss est utilisé pour démontrer le théorème de factorisation primaire d'un polynôme à coefficients complexes et aussi réels mais pour simplifier le propos, et comme la démonstration n'est pas au programme, dans ce cours on a choisi un autre ordre.

Comment déterminer la factorisation primaire d'un polynôme P ?

- 1) Si $\deg P = 1$ ou $\deg P = 2$ on sait faire quitte à utiliser le discriminant pour le degré 2.
- 2) Sinon $\deg P \geq 3$ et alors P admet des diviseurs non triviaux puisqu'il n'est pas premier. On en cherche grâce aux racines et cela donne une factorisation non triviale $P = P_1 P_2$ qui n'est peut-être pas la bonne mais qui fait intervenir des polynômes de degré plus petit qu'on cherche individuellement à factoriser etc ... On n'oublie pas d'exploiter si possible la multiplicité des racines et les racines complexes non réelles quand le polynôme P est réel.
On peut aussi factoriser P en utilisant des identités remarquables (bicarrés)

4. Pgcd et coefficients de Bézout

Théorème 3.0.6.

Soit $A(X)$ et $B(X)$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ dont l'un au moins est non nul. Alors il existe un unique polynôme **unitaire** D qui vérifie

(i) D divise A et D divise B .

(ii) Chaque polynôme qui divise à la fois A et B est un diviseur de D .

Ce polynôme D est appelé le pgcd de A et B . C'est "le plus grand" des diviseurs communs au sens de la divisibilité et aussi au sens des degrés.

Définition 3.0.4.

On dit que deux polynômes non nuls sont premiers entre eux quand leur pgcd vaut 1.

Théorème 3.0.7. Théorème de Bézout

Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec au moins l'un des deux non nul. Il existe U et V deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que :

$$U(X)A(X) + V(X)B(X) = \text{pgcd}(A, B)$$

Attention, les polynômes U et V du théorème ne sont pas uniques ! Attention aussi que le théorème n'est pas une équivalence, on ne doit donc pas penser qu'une écriture $UA + VB = P$ implique que P est le pgcd de A et B ...

Théorème 3.0.8. Identité de Bézout

Soit $A(X)$ et $B(X)$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ non nuls. Alors :

(A et B sont premiers entre eux) **si et seulement si** (il existe deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ U et V qui vérifient $UA + VB = 1$).

Contrairement au théorème de Bézout, l'identité de Bézout est une équivalence.

L'algorithme d'Euclide pour trouver le pgcd et des polynômes de Bézout associés

Pour trouver le pgcd de deux polynômes on peut utiliser leur factorisation primaire si on la connaît ou l'algorithme d'Euclide. Une version étendue de l'algorithme d'Euclide permet aussi de produire des polynômes de Bézout associés.

Exemple :

Soit $A(X) = X^4 + 2X^3 + X + 1$ et $B(X) = X^3 + X - 1$. Déterminer le pgcd de A et B avec l'algorithme d'Euclide et des polynômes de Bézout associés.

Chapitre 4

Systèmes linéaires

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ est un des ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1) Généralités

Équations linéaires

L'idée du mot linéaire :

Des blocs "constante $\times$ variable"

Définition 4.0.1.

(i) On appelle **fonction linéaire** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ une fonction f qui vérifie :

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax$$

(ii) On appelle **équation linéaire** dans $\mathbb{K}$ une équation (E) d'inconnues $x_1, x_2 \dots x_p$ dans $\mathbb{K}$ qui peut s'écrire sous la forme :

$$(E) : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_px_p = b$$

où les $a_i \in \mathbb{K}$ sont des constantes appelées **coefficients** de l'équation et b est appelé le **second membre** de l'équation.

Vocabulaire :

- Un p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ de $\mathbb{K}^p$ qui vérifie l'égalité est **une** solution de l'équation, l'ensemble des solutions est donc un sous-ensemble de $\mathbb{K}^p$.
- Résoudre l'équation c'est trouver **toutes** les solutions de l'équation, la résolution doit permettre d'écrire l'ensemble des solutions en $\{forme ; type\}$.

Exercice corrigé

- 1) L'équation $x^2 + y^2 = 1$ d'inconnues x, y réelle est-elle linéaire ?
- 2) L'équation $(E) : 4x - 3y - 2 = 0$ d'inconnue x, y réelle est-elle linéaire ? Combien a-t-elle de solutions ? Décrire l'ensemble des solutions géométriquement et sous forme paramétrée.

3) L'équation $(E) : 3x + 2y - 7z = 0$ est-elle linéaire ? Décrire l'ensemble des solutions géométriquement et sous forme paramétrée.

4) Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $(E) : (m^2 - 1)x + 3(m + 1)y = 2$ d'inconnues x, y réelles et donner l'interprétation géométrique de l'ensemble des solutions

Systèmes linéaires

Définition 4.0.2.

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$.

On appelle système linéaire (S) de n équations à p inconnues, un système de n équations linéaires à p inconnues $x_1, \dots, x_p$:

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

On présente toujours un tel système avec les inconnues " bien rangées " les unes au dessous des autres.

Vocabulaire :

- Les constantes $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ sont appelés coefficients de (S) , le n -uplet $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ est le second membre de (S)
- On note $L_1, \dots, L_n$ les n lignes (équations), constituant (S)
- Une solution de (S) est un p -uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ qui vérifie les n égalités. L'ensemble des solutions est donc un sous-ensemble (vide ou pas) de $\mathbb{K}^p$.
- Résoudre (S) c'est déterminer toutes les solutions de (S) de façon à pouvoir l'écrire en $\{\text{forme} ; \text{type}\}$.
- Le système (S) est dit **compatible** s'il admet au moins une solution ; sinon, (S) est dit **incompatible**
- Si $(b_1, \dots, b_p) = (0, \dots, 0)$, le système est dit **homogène**

- Le tableau $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ & & \vdots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ s'appelle **matrice du système**.

Exercice corrigé :

Soit le système d'inconnues $x, y, z, t \in \mathbb{R}$:

$$(S) : \begin{cases} x + 2y + 3z - 4t = 0 \\ 4z - 5t + x - 5 = 0 \end{cases}$$

Ce système est-il linéaire ? Est-il homogène ? Est-il compatible ? Donner la matrice du système.

2) Les systèmes échelonnés

Définition 4.0.3.

Un système linéaire (bien rangé) est qualifié d'échelonné quand le nombre de coefficients nuls qui commencent une ligne croît strictement ligne après ligne. (la croissance stricte s'arrêtant éventuellement quand il ne reste plus que des zéros)

Exercice corrigé 1

Quels sont les systèmes échelonnés ? (pour (T_3) on a α et β des paramètres dans $\mathbb{K}$).

$$(T1) \begin{cases} x + 2y + 3z - 4t = 0 \\ 4z - 5t = 0 \end{cases} \quad (T2) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \quad (T3) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ z = \alpha \\ \beta z = \alpha \end{cases}$$

Définition 4.0.4.

- On appelle **pivot** d'un système échelonné le premier coefficient non nul de chaque ligne du système.
- Le **rang** r d'un système échelonné est le nombre de lignes non nulles de la matrice du système, c'est aussi le nombre de pivots.
- Les r inconnues $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ "associés" aux pivots sont appelées **inconnues principales par défaut**, les autres sont les inconnues **secondaires par défaut**.

Théorème 4.0.1.

Il n'y a que trois cas de figure possibles pour les solutions d'un système linéaire échelonné de n équations à p inconnues de rang r :

- 1) Le système possède un et un seul p -uplet solution
- 2) Le système n'a pas de solutions (ce qui se voit par simple observation des $n - r$ dernières lignes)
- 3) Le système possède une infinité de solutions et ces solutions s'expriment en fonction des inconnues secondaires.

Exercice corrigé 2

1) Pour chacun des systèmes suivants : i) Mettre en évidence l'aspect échelonné ii) Donner le rang et les inconnues principales et secondaires par défaut iii) Résoudre le système.

$$(T1) \begin{cases} x + y + 12z = 0 \\ y + z = 0 \\ z = 3 \end{cases} \quad (T2) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad (T3) \begin{cases} x + 2y + 3z - 4t = 0 \\ 4z - 5t = 0 \end{cases}$$

2) Résoudre le système suivant de paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(S) \begin{cases} 3x + 2y + 3z + 2t = 5\alpha \\ 3y - z - t = 1 \\ 2z + 8t = 4 \\ 0 = 1 - \alpha \end{cases}$$

Le pivot de Gauss pour les systèmes linéaires non échelonnés.

Opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire

Définition 4.0.5. On appelle opération élémentaire sur les lignes d'un système linéaire, chacune des trois opérations suivantes :

- Échange de deux lignes : $L_i \longleftrightarrow L_j$ ($i \neq j$)
- Multiplication d'une ligne par $k \neq 0$: $L_i \longleftrightarrow kL_i$
- Ajout d'un multiple d'une autre ligne : $L_i \longleftrightarrow L_i + kL_j$, ($i \neq j$)

Théorème 4.0.2. Si on transforme un système avec des opérations élémentaires sur les lignes alors le nouveau système est équivalent au premier, ils auront donc le même ensemble de solution.

Le pivot de Gauss

GAUSS Karl Friedrich, allemand, 1777-1855

Enfant prodige, né à Brunswick dans une famille pauvre, Gauss obtint une bourse (1792) du duc de Brunswick afin de poursuivre ses études. Il étudia à Göttingen de 1795 à 1798 et soutint sa thèse l'année suivante à Helmstedt sous la direction de Pfaff. Illustre mathématicien (arithmétique, géométrie différentielle), physicien (importants travaux et publications en électricité, optique et magnétisme, théorie du potentiel), Gauss fut aussi un astronome réputé : succédant à Mayer (1807) il fut directeur de l'observatoire de Göttingen tout en enseignant à l'université. Il établit l'orbite de Cérès (découverte en 1801 par l'astronome italien Giuseppe Piazzi) en utilisant la méthode des moindres carrés Sollicité par von Humboldt, Gauss est, avec Wilhelm Weber (1804-1891), à l'origine de l'étude du champ magnétique terrestre. Le gauss est aujourd'hui l'unité d'induction magnétique. Ce grand savant, sera surnommé par ses pairs "Prince des mathématiciens".

Théorème 4.0.3. *Théorème de Gauss*

Soit (S) un système linéaire quelconque. Alors il existe une succession d'opérations élémentaires sur les lignes qui transforme (S) en un système échelonné équivalent. Ainsi un système linéaire possède une et une seule solution, ou pas de solution ou une infinité de solutions.

Démonstration.

Admis ! Nous allons juste comprendre le fonctionnement de l'algorithme de Gauss en traitant un exemple :

$$(S) = \begin{cases} 2x & +4y & -2z & & = -6 \\ x & +3y & & +t & = 0 \\ 3x & -y & +z & +2t & = 8 \\ & -y & +2z & +t & = 6 \\ & \dots & & & \end{cases}$$

□

Comment résoudre un système linéaire en pratique ?

Si le système n'est pas échelonné, on l'échelonne avec un pivot de Gauss (choisir si possible à chaque étape un pivot égal à ± 1). Ensuite on voit s'il y a 0, 1 ou une infinité de solutions que l'on détermine en parcourant les équations de bas en haut. Dans le cas où il y a une infinité de solutions, on doit les écrire avec les inconnues secondaires qui peuvent être choisies par défaut comme celles qui ne sont pas "associées" aux pivots

Exercice corrigé :

1)(i) Déterminer le(s) polynôme(s) P de degré 3 au plus tel(s) que : $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $P(3) = 0$.

(ii) Donner un exemple numérique de polynôme P solution.

2) Résoudre en fonction des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ le système : $(S) \begin{cases} x + y + z = 0 & L_1 \\ 3x - y + z = 0 & L_2 \\ 2x - 2y + \beta z = \alpha & L_3 \end{cases}$

Matrices

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ses éléments seront appelés des **scalaires**.

Matrices à n lignes et p colonnes

Présentation

Définition 4.0.6. Soit deux entiers n et p supérieurs ou égaux à 1. On appelle matrice de type (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$, un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes rempli d'éléments de $\mathbb{K}$ appelés les coefficients de la matrice. On dit aussi matrice $n \times p$.

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on dit que la matrice est réelle (au lieu de dire à coefficients réels), quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ on dit que la matrice est complexe.

On peut déclarer une matrice de plusieurs façons :

(i) " Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ " (déclaration " minimale " qui donne un nom et la taille de la matrice ainsi que le type de ses coefficients).

(ii) " Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ avec $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ " qui déclare à la fois A et ses coefficients, le coefficient $a_{i,j}$ étant par convention celui qui est situé en ligne i et en colonne j .

(iii) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ **tels que** $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ (déclaration similaire à (ii))

(iv) En expansion (pour les matrices de petite taille en principe) :

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

(v) Cas particulier usuel :

Soit $A = 0 \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ déclare la matrice nulle de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls et qui est un abus usuel de notation puisque 0 est un réel et non pas un tableau donc le = peut paraître non légitime!!!

Remarque :

Les inclusions $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ entraînent immédiatement les inclusions $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{Q}) \subset \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. Ces inclusions, en particulier la dernière, constituent un outil très intéressant pour certains problèmes sur les matrices.

Exemple :

Le tableau $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 12 & -\pi \\ 3 & \frac{4}{5} \\ -1 & -12 \\ 40 & 7 \end{pmatrix}$ est une matrice à 5 lignes et 2 colonnes, ses coefficients sont réels

mais non rationnels, c'est donc un élément de $\mathcal{M}_{5,2}(\mathbb{R})$. En l'absence de tout contexte, il n'est pas naturel de la considérer comme un élément de $\mathcal{M}_{5,2}(\mathbb{C})$ (même si c'est le cas !)

Égalité de deux matrices

Définition 4.0.7. Soient quatre entiers n, p, n', p' . Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $A' = (a'_{i,j})$ une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n',p'}(\mathbb{K})$. On dit que ces matrices sont égales si et seulement si :

$$(n = n') \wedge (p = p') (\text{taille identique})$$

$$\forall (i, j) \in [[1, n]] \times [[1, p]], \quad a_{i,j} = a'_{i,j}$$

Matrices particulières :

Matrices lignes : Soient n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 2.

Une matrice L qui a une seule ligne est appelée matrice ligne. Si elle a p colonnes elle s'écrit donc en expansion $L = (a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad \dots \quad a_{1,p})$

Matrices colonnes : De même, une matrice C qui a une seule colonne est appelée matrice

colonne. Si elle a n lignes son écriture en expansion sera $C = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}$

Matrices carrées : Une matrice qui a le même nombre de lignes et de colonnes est appelée matrice carrée. Si ce nombre est l'entier n , on dit que la matrice est d'ordre n . On note alors $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On déclare aussi $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ au lieu de $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

Définition 4.0.8. Soit $A = (a_{i,j})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **coefficients diagonaux** les scalaires $a_{i,i}$. Ils constituent la **diagonale principale** (en partant d'en haut à gauche) de la matrice A .

Il y a un certain nombre de cas particuliers de matrices carrées intéressants. Nous allons les énumérer dans les paragraphes suivants.

Matrices triangulaires supérieure : On appelle matrice **triangulaire supérieure** une matrice carrée dont tous les termes "au-dessous" de la diagonale principale sont nuls.

On déclare une matrice triangulaire supérieure par $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et :

$$\forall i, j \in [[1, n]], (i > j) \Rightarrow (a_{i,j} = 0) .$$

Matrices triangulaires supérieure : On appelle matrice **triangulaire inférieure** une matrice carrée dont tous les termes "au-dessous" de la diagonale principale sont nuls.

On déclare une matrice triangulaire inférieure par $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et :

$$\forall i, j \in [[1, n]], (i < j) \Rightarrow (a_{i,j} = 0) .$$

Matrices diagonales : On appelle matrice diagonale une matrice carrée dont les termes situés hors de la diagonale principale sont tous nuls. Pour déclarer une matrice diagonale on écrit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\forall i, i \in [[1, n]], i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$

Définition 4.0.9. La matrice **diagonale** d'ordre n dont les éléments de la diagonale principale sont tous égaux à 1 est appelée la matrice unité d'ordre n et notée I_n . On a donc :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Pour décrire mathématiquement I_n on utilise souvent le symbole de Kronecker :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

On peut alors écrire $I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Matrice a une ligne et une colonne : Dans le cas très particulier où l'on a une matrice à une ligne et une colonne, la matrice est donc définie par un seul élément de $\mathbb{K}$.

L'usage veut, et cela est cohérent avec tout ce qui pourra être introduit pour les matrices carrées, que l'on "identifie" cette matrice et le scalaire qui la définit.

Transposée d'une matrice

Définition 4.0.10. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A et l'on note tA la matrice élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ de terme général $\alpha_{i,j} \in \mathbb{K}$ défini par

$$\forall (i, j) \in [[1, p]] \times [[1, n]], \quad \alpha_{i,j} = a_{j,i}$$

Propriété 4.0.1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a ${}^t({}^tA) = A$

Démonstration. C'est immédiat vu la définition. □

Opérations sur les matrices

Somme de matrices

La somme de deux matrices est naturelle : on va pouvoir additionner deux matrices quand elles sont de même taille et on additionnera terme à terme.

Définition 4.0.11. Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle somme des matrices A et B , et l'on note $A + B$, la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de terme général la somme des termes généraux de A et B .
Autrement dit $A + B = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ avec $\forall i \in [[1, n]], \forall j \in [[1, p]] \quad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$

Propriété 4.0.2.

(i) L'addition des matrices est commutative :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad A + B = B + A$$

(ii) L'addition des matrices est associative :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad (A + B) + C = A + (B + C)$$

(iii) La matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls est élément neutre pour l'addition des matrices. Autrement dit, si nous notons 0 cette matrice, on a :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad A + 0 = A (= 0 + A)$$

.

(iv) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La matrice $A' = (-a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est symétrique de A pour l'addition des matrices, autrement dit $A + A' = 0 (= A' + A)$. On note $-A$ la matrice A' et on dit qu'elle est **l'opposée** de A .

Remarque : Ces quatre items prouvent que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni de l'addition des matrices est un groupe commutatif !

Démonstration.

(i) **Soit** $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrons que $A + B = B + A$.

Il est clair que $A + B$ et $B + A$ ont la même taille.

Soit $i \in [[1, n]]$ et $j \in [[1, p]]$, notons $a_{i,j}$ le terme général de A et $b_{i,j}$ celui de B , alors le terme général de $A + B$ est $a_{i,j} + b_{i,j}$, tandis que celui de $B + A$ est $b_{i,j} + a_{i,j}$ avec $+$ qui est l'addition usuelle de $\mathbb{K}$ donc on a l'égalité : $a_{i,j} + b_{i,j} = b_{i,j} + a_{i,j}$ entre les termes généraux des matrices $A + B$ et $B + A$.

Conclusion : $A + B = B + A$

(ii) A faire en exercice

(iii) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, montrons que $A + 0 = A$

En comparant les termes généraux on obtient immédiatement $a_{i,j} + 0 = a_{i,j}$ d'où l'égalité matricielle demandée.

(iv) C'est immédiat en regardant la taille et le terme général des matrices.

□

Remarque :

On a bien noté que toutes les propriétés du "+" matriciel qui viennent d'être montrées découlent des propriétés analogues du "+" de $\mathbb{K}$ qui désigne, rappelons le, l'un des trois corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Propriété 4.0.3. La transposée de la somme de deux matrices est la somme des matrices transposées :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), {}^t(A + B) = {}^t A + {}^t B$$

Démonstration.

□

Produit d'une matrice par un scalaire

Définition 4.0.12. Soient A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et α un élément de $\mathbb{K}$. On désigne par $\alpha.A$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le terme général est le produit par α du terme général de A . On a donc $\alpha.A = (\alpha a_{i,j})$. On dit que $\alpha.A$ est le produit de la matrice A par le scalaire α et on note souvent αA au lieu de $\alpha.A$

Il est clair que le fait que le produit de deux éléments de $\mathbb{K}$ soit encore un élément de $\mathbb{K}$, est essentiel dans cette définition.

Propriété 4.0.4.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

(i) Soient α, β deux éléments de $\mathbb{K}$, alors

$$\alpha.(\beta.A) = (\alpha.\beta).A$$

(ii) $1.A = A$

(iii) Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, alors ${}^t(\alpha A) = \alpha {}^t A$

Démonstration.

La comparaison de la taille et des termes généraux conduit à chaque fois à l'égalité matricielle.

□

Enchaînement d'opérations

Propriété 4.0.5. Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Alors :

(i) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

(ii) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

(iii) $\alpha A = 0$ si et seulement si $\alpha = 0$ ou $A = 0$.

(iv) $(-\alpha)A = \alpha(-A)$ et on peut donc noter plus simplement $A - B$ la matrice $A + (-B)$.

(v)

$$(\alpha - \beta)A = \alpha A - \beta A$$

$$\alpha(A - B) = \alpha A - \alpha B$$

Démonstration.

Seul le point (iii) n'est pas évident (pour les autres, il suffit de comparer la taille et les termes généraux des matrices).

Montrons donc que $\alpha A = 0$ si et seulement si $\alpha = 0$ ou $A = 0$.

Le sens $\alpha = 0$ ou $A = 0$ implique $\alpha A = 0$ est évident.

On cherche donc à prouver que $\alpha A = 0$ implique $\alpha = 0$ ou $A = 0$. Comment commence-t-on la rédaction d'une telle preuve ?

...

□

Produit de matrices

Après avoir muni de manière très naturelle $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de deux opérations, l'addition et le produit par un scalaire, nous allons définir, dans des conditions bien déterminées, le produit de deux matrices.

La définition qui va être donnée peut paraître arbitraire et peu naturelle. Elle sera en fait justifiée par les usages qui en seront faits avec les applications linéaires ; ils montreront que la définition choisie est la "bonne".

Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Considérons une matrice ligne à p éléments : $L = (l_1 \ l_2 \ \dots \ l_p)$ et une matrice colonne à p éléments aussi : $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$, alors le produit de la matrice L par la matrice C (appelé produit ligne-colonne) est la matrice notée LC élément de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ définie par :

$$LC = (l_1 c_1 + l_2 c_2 + \dots + l_p c_p)$$

Exemple :

$$L = (1 \ 2 \ 3), \ C = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Calculer LC

Par abus de vocabulaire, on peut dire que le résultat d'un produit ligne-colonne est un simple élément de $\mathbb{K}$.

Définition et exemples

On va pouvoir généraliser le produit précédent avec une contrainte : Soient A et B deux matrices, pour définir le produit AB il faudra que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B .

Définition 4.0.13. Soient n, p et p', q des entiers supérieurs ou égaux à 1.

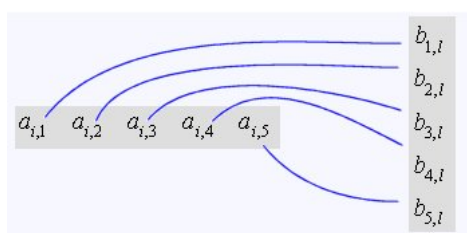
Soient A une matrice à n lignes et p colonnes, B une matrice à p' lignes et q colonnes, toutes les deux à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors :

(i) Le produit AB est défini si et seulement si $p = p'$

(ii) Si $p = p'$ alors AB est la matrice à n lignes et q colonnes, à coefficients dans $\mathbb{K}$, dont le terme général $c_{i,j}$ est donné par la formule $c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$.

Que signifie cette définition ? Prenons par exemple $p = 5$. La forme développée du coefficient $c_{i,j}$ est alors $c_{i,j} =$

On voit que pour obtenir ce coefficient, il suffit de faire le produit ligne-colonne entre la i -ième ligne de A et la j -ième colonne de B :



L'expression d'usage est : pour obtenir $c_{i,l}$ on fait "le produit de la i -ième ligne de A par la j -ième colonne de B ".

ATTENTION!!!

Le produit des matrices n'est pas commutatif et plusieurs cas de figures peuvent se produire :

(i) L'un des deux produits AB et BA peut ne pas avoir de sens alors que l'autre en a.

(ii) Dans le cas où AB et BA existent simultanément, le résultat peut être des matrices qui ne sont pas de même type.

(iii) Le résultat de ces deux produits quand ils sont définis simultanément peut être des matrices de même type (cas de deux matrices carrées par exemple) mais non égales.

(iv) Il existe tout de même des matrices A et B telles que $AB = BA$ par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(v) $AB = 0$ n'entraîne pas $A = 0$ ou $B = 0$, attention aux équations matricielles.

Propriété 4.0.6.**(i) Associativité :**

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Alors les produits AB , $(AB)C$, BC , $A(BC)$ ont un sens et l'on a l'égalité suivante dans $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$:

$$(AB)C = A(BC) = ABC$$

(ii) Distributivité :

• Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors la somme $A + B$, les produits $(A + B)C$, AB , BC ont un sens et on a l'égalité dans $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$

$$(A + B)C = AC + BC$$

• Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors la somme $B + C$, les produits $A(B + C)$, AB , AC ont un sens et on a l'égalité dans $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$

$$A(B + C) = AB + AC$$

(iii) Commutativité avec les scalaires :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors les produits AB , $A(\lambda B)$, $(\lambda A)B$ ont un sens et on a

$$(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$$

(iv) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, I_n la matrice unité de type n , et I_p la matrice unité de type p . Alors on a $AI_p = A$ et $I_n A = A$

(v) Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ deux matrices. Alors les produits AB et ${}^t B {}^t A$ ont un sens et ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$.

Démonstration.

(i) Remarquons d'abord que les produits $(AB)C$ et $A(BC)$ sont deux matrices de même taille. Le terme général de AB est $\alpha_{i,j} =$

Donc le terme général de $(AB)C$ est $u_{i,j} =$

De même, le terme général de BC est $\beta_{i,j} =$

Donc le terme général de $A(BC)$ est $v_{i,j} =$

On trouve l'égalité des termes généraux, $u_{i,j} = v_{i,j}$ d'où l'égalité des matrices attendue.

(ii) Les matrices à comparer sont de même taille, on compare donc les termes généraux. Le terme général de $(A + B)C$ est $u_{i,j} =$

Le terme général de $AC + BC$ est $v_{i,j} =$

On conclut à l'égalité matricielle.

(iii) Évident en écrivant les termes généraux des matrices.

(iv) Le terme général de AI_p est $u_{i,j} =$

Dans cette somme, tous les termes $\delta_{k,j}$ sont nuls sauf le terme $\delta_{i,j} = 1$, on en déduit $u_{i,j} = a_{i,j}$ et donc $AI_p = A$.

(v) A faire en exercice.

□

Matrices carrées

Introduction

Rappelons donc qu'une matrice qui a le même nombre de lignes et de colonnes est appelée matrice carrée. Si ce nombre est l'entier n , on dit que la matrice est d'ordre n et l'on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Une matrice carrée se présente donc sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Produit, puissances de matrices carrées

L'hypothèse : " même nombre de lignes et de colonnes " enrichit beaucoup la notion de produit de matrices. En effet si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a le droit de calculer les deux produits AB et BA et ce sont encore des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (l'opération "produit" est appelée une loi interne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Attention, on a vu que le produit n'est pas commutatif, même si AB et BA existent simultanément et sont de même type.

Propriété 4.0.7.

Le produit des matrices carrées d'ordre n est une opération sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, associative, distributive par rapport à l'addition

La matrice unité d'ordre n notée I_n vérifie pour tout élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $AI_n = I_nA = A$.

Attention Certaines propriétés du produit, naturelles par exemple dans $\mathbb{R}$, ne sont pas vraies dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Par exemple :

1. Le produit n'est pas commutatif (déjà vu)
2. Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, non nulles , peuvent avoir un produit nul.

Par conséquent on pourra avoir $AB = AC$ avec $B \neq C$ et $A \neq 0$.

Définition 4.0.14. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit les puissances de A par récurrence de la manière suivante :

$$A^0 = I_n \\ \forall p \in \mathbb{N}, A^{p+1} = AA^p = A^pA$$

Évidemment, tout ceci n'a aucun sens si l'on considère une matrice non carrée car ces produits n'existent pas.

Formule du binôme

On vient de voir que, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la somme et le produit possèdent toutes les propriétés qui permettent de faire des calculs, sauf la commutativité du produit. Cela pose évidemment des problèmes si l'on souhaite calculer la puissance d'un produit ou celle d'une somme.

En effet, par exemple $(AB)^2 = ABAB$ et on ne peut rien dire de plus si l'on ne sait pas que $AB = BA$.

De même, $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$ et, de la même façon, on ne peut rien dire de plus si l'on ne sait pas que $AB = BA$.

Donc on ne pourra pas obtenir **en général**, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, des formules type " identités remarquables " ou formule du binôme. On saura juste donner un résultat lorsque les matrices considérées commutent entre elles.

Propriété 4.0.8. Soient deux éléments A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **qui commutent**, c'est à dire que $AB = BA$, alors pour tout entier naturel m tel que $m \geq 1$ on a la formule

$$(A + B)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

Démonstration. La preuve est identique à celle de la formule du binôme sur $\mathbb{K}$. □

Application : Calcul de puissance de matrice de la forme $\lambda I_n + N$ avec N nilpotente

Définition 4.0.15. Une matrice nilpotente N est une matrice carrée dont une puissance est nulle, c'est-à-dire telle qu'il existe un entier naturel p tel que $N^p = 0$. On appelle **ordre** d'une matrice nilpotente N le plus petit entier p tel que $N^p = 0$.

Matrices carrées inversibles

Il faut noter immédiatement que la notion de matrice inversible n'a de sens que pour les matrices carrées.

Définition 4.0.16. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible quand il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n = BA$

Le mot " existe " qui apparaît dans la définition est essentiel : en effet il donne à penser que pour certaines matrices, cela peut être vrai, pour d'autres non. Nous allons illustrer cette remarque par des exemples.

Notons que, pour l'instant, nous n'avons pas d'autre outil que la définition pour savoir si une matrice est inversible ou non. On est donc amené, pour répondre à cette question, à la résolution d'un système. Cela peut donner lieu à de très gros calculs puisque si les matrices considérées sont d'ordre n , on est conduit à résoudre un système à n^2 équations dans $\mathbb{K}$.

Propriété 4.0.9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée à n lignes et n colonnes. S'il existe une matrice B appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$, elle est unique.

Démonstration.

La loi $\cdot$ est une loi interne associative et qui possède un élément neutre, donc le symétrique d'un élément (ici l'inverse d'une matrice) quand il existe est unique.

□

Vocabulaire et notation Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$ est appelée matrice inverse de A et notée A^{-1} .

Exemple 4.0.1.

...

Propriété 4.0.10.

(i) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$; on a alors $B = A^{-1}$

Autrement dit, si une matrice carrée admet un inverse à droite, il sera aussi son inverse à gauche et la matrice est donc inversible.

(ii) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $CA = I_n$ et alors $C = A^{-1}$
Autrement dit, si une matrice carrée admet un inverse à gauche, il sera aussi son inverse à droite et la matrice est donc inversible.

Démonstration.

Admis !

□

Comment savoir si une matrice est inversible, et comment dans la pratique calculer l'inverse ?

Les méthodes (car il y en a plusieurs) seront vues en détail plus tard.

Pour l'instant, contentons nous de dire que l'outil le plus utilisé pour savoir si une matrice est inversible est le **déterminant**. Plus précisément : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

Comment dans ce cas calculer l'inverse ?

1. Résolution du système linéaire naturellement associé à la matrice grâce au pivot de Gauss.
2. Calcul de la matrice des cofacteurs.

Théorème 4.0.4.

1. Soit λ un scalaire quelconque non nul et A une matrice inversible, élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors la matrice λA est inversible et $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$.

2. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversibles. Alors la matrice AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversible. Alors la matrice A^{-1} est inversible et son inverse est égale à A .

4. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversible. La matrice ${}^t A$ est inversible et $({}^t A)^{-1} = {}^t A^{-1}$.

Démonstration.

1. Comme $\lambda \neq 0$ et A inversible, on peut poser $B = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$. On calcule $\lambda AB = \lambda \frac{1}{\lambda} AA^{-1} = I_n$, donc la matrice B est l'inverse à droite de la matrice carrée λA ce qui prouve l'inversibilité d'après la propriété 3.10 et donne aussi l'inverse.

On procède de même pour les autres points de la propriété.

□

"Simplification" par une matrice inversible Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ quelconque, la relation $MA = MB$ où A , et B sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'entraîne pas forcément l'égalité $A = B$.

Par contre, si M est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, une telle situation ne peut se produire comme le prouve la proposition suivante :

Propriété 4.0.11. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et M une matrice ***inversible*** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors l'égalité $MA = MB$ implique l'égalité $A = B$.
De même, l'égalité $AM = BM$ implique $A = B$.
On dit que M est un élément ***régulier*** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration.

...

□

Noyau d'une matrice

Définition 4.0.17. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle noyau de A et on note $\ker A$ l'ensemble suivant :

$$\ker A = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\}$$

Il est toujours non vide car la colonne nulle est un élément de $\ker A$

Propriété 4.0.12. Soient A une matrice carrée. Alors A est inversible si et seulement si il n'y a que la colonne nulle dans son noyau.

$$A \text{ inversible} \iff \ker A = \{0\}$$

Chapitre 6 : Déterminants

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ses éléments seront appelés des **scalaires**.

Existence et unicité

Introduction

Le déterminant est un **outil** permettant, par exemple, de donner une caractérisation des matrices carrées inversibles ou (à voir ultérieurement) de tester si une famille de n vecteurs dans un espace de dimension n est libre.

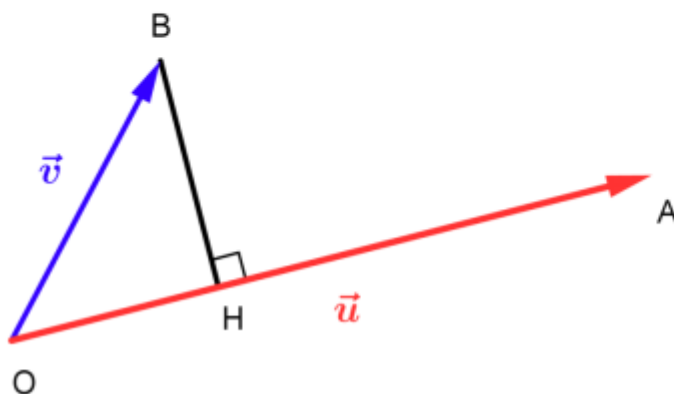
Il peut aussi être vu comme une généralisation de la notion de surface et volume.

L'ordre d'exposition choisi ici est de définir la notion de déterminant d'une matrice. Plus tard, nous en déduirons la notion de déterminant d'une famille de vecteurs par rapport à une base et enfin la notion de déterminant d'endomorphisme.

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On utilisera la propriété de première S rappelée ci-dessous :

• Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$
Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$ où H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA) .



Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 1,2 ou 3

Définition 4.0.18.

(i) Soit $A = (a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de la matrice A la quantité $a \in \mathbb{K}$. On note dans ce cas $\det A = a$

(ii) Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de la matrice A la quantité $ad - bc \in \mathbb{K}$. On note dans ce cas :

$$\det A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

(iii) Soit $A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ On appelle déterminant de A la quantité :

$$\det A = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbh - dbi - ahf - gec$$

Remarques :

Pour retenir la formule (ii) on utilise un produit en croix :

Pour retenir la formule 3, on peut utiliser la règle de Sarrus :

Propriété 4.0.13.

(i) La valeur absolue du déterminant d'une matrice de taille 2 représente la surface du parallélogramme construit à partir des vecteurs colonnes de A .

(ii) La valeur absolue du déterminant d'une matrice de taille 3 représente le volume du parallélépipède construit à partir des vecteurs colonnes de A .

Démonstration.

(i) Considérons dans $\mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormé habituel les deux vecteurs colonnes de A nommés ici $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$. On construit avec ces deux vecteurs un parallélogramme dont on cherche à exprimer l'aire $\mathcal{A}$ en fonction des coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Cette aire est le produit de la base $b = \|\vec{u}\|$ par la hauteur h . En considérant $\vec{u}' = (-b, a)$ le vecteur directement orthogonal à $\vec{u}$, en remarquant que la hauteur h est la norme du projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}'$ et en utilisant le rappel de première on trouve que $\mathcal{A} = \|\vec{u}\|.h = \|\vec{u}'\|.h = |\vec{v} \cdot \vec{u}'| = |ad - bc|$.

(ii) Preuve admise

□

Corollaire :

(i) Le déterminant d'une matrice de taille 2 est nul si et seulement si ses deux vecteurs colonnes sont colinéaires.

(ii) Le déterminant d'une matrice de taille 3 est nul si et seulement si ses trois vecteurs colonnes sont coplanaires.

Cas général

Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note C_i la i -ième colonne de M de façon à pouvoir écrire $M = (C_1, C_2 \dots C_n)$ et $\det(C_1, \dots, C_n)$.

Théorème/définition

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. A toute matrice M carrée d'ordre n on peut associer **un unique élément** de $\mathbb{K}$, appelé déterminant de M et noté $\det(M)$ ou $\det M$, caractérisé par les trois propriétés suivantes :

(1) L'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ définie par le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne :

$$(i) \forall 1 \leq i \leq n, \det(C_1, \dots, C_i + C'_i, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) + \det(C_1, \dots, C'_i, \dots, C_n)$$

$$(ii) \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(C_1, \dots, \lambda C_i, \dots, C_n) = \lambda \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n)$$

(2) Si deux colonnes d'une matrice M sont égales, alors son déterminant est nul.

(3) Le déterminant de la matrice unité est égal à 1.

Dans la suite on désignera ces trois propriétés sous le nom de **propriétés caractéristiques du déterminant**.

L'exercice précédent prouve que la formule donnée pour les matrices de taille 2 vérifie les propriétés (1),(2) et (3) (Remarquons aussi que l'exercice ne prouve en rien l'unicité de la formule ...)

Propriété 4.0.14. Il y a équivalence entre

(2) Si deux colonnes d'une matrice M sont égales, son déterminant est nul.

(2') Si on permute deux colonnes C_i et C_j , $i \neq j$ de M (les autres restant inchangées) on obtient :

$$\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -\det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n)$$

Démonstration.

...

□

Dans certains ouvrages, le théorème définition du déterminant est énoncé avec les propriétés (1),(2') et (3) au lieu du (1),(2),(3) choisi dans ce cours.

Développement du déterminant par rapport à une ligne

Nous avons des formules directes qui permettent de calculer le déterminant dans les cas $n=1$, 2 et 3. Dans ce paragraphe, nous allons voir une formule qui permet de calculer le déterminant **par récurrence** pour toutes les valeurs de n .

Notation et vocabulaire :

Soit M une matrice carrée d'ordre n . Il est évident que si l'on supprime une ligne et une colonne dans M , la matrice obtenue est à $n-1$ lignes et $n-1$ colonnes. On note $M_{i,j}$ la matrice obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ième colonne.

Le scalaire $\det M_{i,j}$ est appelé **le mineur** de $m_{i,j}$.

Le scalaire $\Delta_{i,j} = (-1)^{i+j} \det M_{i,j}$ est appelée **le cofacteur** de $m_{i,j}$.

Théorème 4.0.5.

(i) Soit $M = (m) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$. Alors $\det M = m$

(ii) Soit $M = (m_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre $n \geq 2$ et i un entier **fixé** entre 1 et n , alors

$$\det(M) = \sum_{k=1}^n m_{i,k} \Delta_{i,k}$$

Remarques :

La formule ci-dessus, pour i fixé, s'appelle **formule de développement du déterminant par rapport à la i -ème ligne**.

L'unicité du déterminant implique que la valeur finale ne dépend pas du choix de la ligne i , cette unicité est admise pour cette année de L1.

Preuve du théorème

La démonstration se fait par récurrence sur l'ordre des matrices. Cas $n = 1$. Soit $M = (m)$; on sait que $\det(M) = m$.

Supposons que l'application $\det : \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ soit définie et vérifie les propriétés caractéristiques (1), (2) et (3).

Fixons $M = (m_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre n et fixons un indice i .

Le scalaire $(-1)^{i+1} m_{i,1} \det M_{i,1} + (-1)^{i+2} m_{i,2} \det M_{i,2} + \dots (-1)^{i+n} m_{i,n} \det M_{i,n}$ est bien défini puisque toutes les expressions qui interviennent dans cette formule concernent des matrices d'ordre $n-1$. Alors l'application $M \mapsto (-1)^{i+1} m_{i,1} \det M_{i,1} + (-1)^{i+2} m_{i,2} \det M_{i,2} + \dots (-1)^{i+n} m_{i,n} \det M_{i,n}$ vérifie les propriétés (1), (2) et (3). Cela découle de leur véracité pour le déterminant des matrices d'ordre $n-1$. Les calculs sont un peu longs mais ne présentent pas de difficultés conceptuelles, ils ne sont pas détaillés ici. On peut donc définir

$$\det(M) = (-1)^{i+1} m_{i,1} \det M_{i,1} + (-1)^{i+2} m_{i,2} \det M_{i,2} + \dots (-1)^{i+n} m_{i,n} \det M_{i,n}$$

Propriétés du déterminant

Déterminant de la transposée d'une matrice

Propriété 4.0.15.

- (i) Une matrice carrée et sa transposée ont le même déterminant : $\det M = \det {}^t M$.
(ii) Le déterminant d'une matrice qui a deux lignes égales est nul.
(iii) On peut développer par rapport à une colonne comme on a développé par rapport à une ligne. La formule obtenue en développant par rapport à la j -ième colonne est :

$$\det M = \sum_{k=1}^n m_{k,j} \Delta_{k,j}$$

Démonstration.

- (i) Preuve admise.
(ii) et (iii) Comme les lignes de M sont les colonnes de ${}^t M$, tous les résultats sur les déterminants vus précédemment sont vrais si les mots colonnes (respectivement lignes) sont remplacés par les mots lignes (respectivement colonnes). □

Déterminant d'un produit matriciel, application à l'inversibilité

Théorème 4.0.6.

- 1) Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n , avec $n \geq 2$. Alors

$$\det AB = \det A \det B$$

- 2) M est une matrice inversible si et seulement si son déterminant est non nul. De plus, on a la relation :

$$\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det M}$$

- 3) Notons $\text{Com}(M) = (\Delta_{i,j})$ la matrice de type n formée par les cofacteurs de M , alors :

$$[{}^t \text{Com}(M)]M = [\det M]I_n = M[{}^t \text{Com}(M)]$$

Ainsi, pour chaque matrice M inversible, on aura :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} {}^t \text{Com}(M)$$

Démonstration.

- 1) Admis
- 2) On écrit $AA^{-1} = I_n$
- 3) On montre d'abord le lemme suivant :

Lemme 4.1.

Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors on a :

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n m_{i,k} \Delta_{j,k} = \begin{cases} \det M & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n m_{k,i} \Delta_{k,j} = \begin{cases} \det M & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Le reste en découle. □

Dans la pratique, la caractérisation à l'aide du déterminant de l'inversibilité d'une matrice est très commode. Par contre la formule donnant l'inverse conduit en général à des calculs assez lourds. On l'utilise essentiellement pour des matrices d'ordre 2 ou d'ordre 3 avec paramètres. Il est souvent plus simple de déterminer l'inverse d'une matrice en résolvant avec la méthode du Pivot de Gauss le système $AX = Y$ (cette méthode sera explicitée ultérieurement).

Exemple 4.0.2.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit inversible ainsi que son inverse dans ce cas.

2. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Déterminant de matrices particulières

Propriété 4.0.16. Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des termes de la diagonale principale.

Remarque : En particulier, le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des termes de la diagonale principale.

Démonstration.

C'est une simple récurrence □

Propriété 4.0.17 (Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs).

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$ de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, B un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, C un élément de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \det C$$

Méthodologie pour le calcul d'un déterminant

On utilisera les règles suivantes :

Propriété 4.0.18.

(i) On ne change pas la valeur du déterminant d'une matrice quand on modifie une colonne (respectivement une ligne) en lui ajoutant une combinaison linéaire des autres colonnes (respt autres lignes).

(ii) Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ On multiplie par α la valeur du déterminant quand on remplace une colonne C_i (respt ligne L_i) par αC_i (respt αL_i).

(iii) On multiplie par -1 le déterminant quand on permute deux colonnes (respt deux lignes).

(iv) $\det M = 0$ si et seulement si une des colonnes de M (respt lignes) est combinaison linéaire des autres.

Démonstration.

(i) On utilise la multilinéarité du déterminant (pté 1 du théorème définition) ainsi que la propriété 2 de ce même théorème définition.

(ii) C'est la propriété de multilinéarité.

(iii) Calculer de deux manières différentes $\det(C_1, \dots, C_i + C_j, C_i + C_j, \dots, C_n)$

(iv) admis.

□

En combinant ces résultats avec le principe du développement par rapport à une ligne ou une colonne (n'importe laquelle d'après l'unicité), principe qui a été vu dans la démonstration de l'existence, on arrive à calculer efficacement les déterminants.

L'idée de base est simple : quand on développe un déterminant, plus le nombre de mineurs (donc de déterminants) à calculer est faible, plus le calcul est simple, il faut donc choisir la ligne ou la colonne ayant un maximum de zéros ($n - 1$ idéalement !) Mais comment faire s'il n'y a pas de zéros ou peu ? On **commence** par faire apparaître des zéros à l'aide de la propriété précédente (c'est toujours possible quand une ligne (ou une colonne) au moins est entièrement "numérique" (c'est à dire sans paramètres).