



Table des matières

1	Booléens, variables, quantificateurs.	4
1.1	Les booléens (ou assertions)	4
1.1.1	Booléens, assertions.	4
1.1.2	Booléens usuels.	4
1.2	Déclaration de variables.	5
1.2.1	Variables déclarées "ponctuellement".	5
1.2.2	Variables déclarées avec le mot " Soit ", affectées, formelles, avec ou sans particularité.	6
1.2.3	Variable déclarée avec ou sans expansion	6
1.3	Déclarer un booléen	7
1.4	Négation d'un booléen.	8
1.5	Les quantificateurs	8
1.5.1	Le quantificateur universel.	8
1.5.2	Le quantificateur existentiel.	10
1.5.3	Négation des booléens quantifiés.	11
1.6	Principes fondamentaux de rédaction mathématique.	12
1.6.1	La démonstration par une succession d'équivalences.	12
1.6.2	La démonstration par une succession d'égalités.	12
1.6.3	Prouver qu'un booléen universel est vrai	12
1.6.4	Prouver qu'un booléen existentiel est vrai.	13
1.6.5	Prouver qu'un booléen est faux	13
1.7	Variables muettes (liées) ou parlantes (libres).	13
1.7.1	Variables muettes	13
1.7.2	Variable parlante	14
1.8	Autres objets mathématiques usuels dont il faut maîtriser la déclaration.	14
1.8.1	Les fonctions	14
1.8.2	Les applications.	15
1.8.3	Les équations ou inéquations	16
1.8.4	Les équations à paramètre	16
2	Déclarer un ensemble, sous-ensembles usuels	18
2.1	Les ensembles usuels	18
2.2	Les parties (sous-ensembles) des ensembles usuels.	19
2.2.1	L' énumération des éléments dans le cas d'un ensemble fini	19
2.2.2	L'écriture dite { type condition }	19
2.2.3	L'écriture dite { forme ; type } ou paramétrique ou explicite	20
2.3	Sous-ensemble usuels	22
2.3.1	Les droites de $\mathbb{R}^2$	22
2.3.2	Les droites de $\mathbb{R}^3$	22
2.3.3	Les plans de $\mathbb{R}^3$	23

2.3.4	Les parties de $\mathbb{R}^2$ délimitées grâce à des courbes de fonction	23
2.3.5	Les parties de $\mathbb{R}^2$ délimitées par un cercle	23
2.3.6	Les parties de $\mathbb{R}$ données par les images d'une fonction	24
2.4	Inclusion d'ensembles, égalité d'ensembles	24
3	Connecteurs logiques, intersection et union d'ensembles	27
3.1	Les connecteurs logiques	27
3.1.1	Le connecteur "NON" (noté $\neg$)	27
3.1.2	Le connecteur "ET" (noté $\wedge$)	27
3.1.3	Le connecteur "IMPLIQUE" (noté $\Rightarrow$)	28
3.1.4	La conjonction "OU" (notée $\vee$)	29
3.2	Contraposée d'une implication, réciproque d'une implication, contraposée de la réciproque d'une implication	30
3.3	Opérations sur les ensembles	31
4	Sommes finies, symbole Σ	35
4.1	Présentation du symbole Σ et écriture en expansion	35
4.2	Passage d'une somme en expansion en Σ	36
4.3	Opérations usuelles avec Σ	37
4.4	Sommes usuelles	38
4.5	Changement d'indice	39

Chapitre 1

Booléens, variables, quantificateurs.

1.1 Les booléens (ou assertions)

1.1.1 Booléens, assertions.

Définition 1.1.1. *En logique, un booléen est une phrase à laquelle on peut attribuer une valeur de vérité : vrai ou faux.*

Un booléen a donc l'apparence d'une affirmation bien rédigée mais qui peut néanmoins être fausse.

■ **Test de compréhension du cours (corrigé en vidéo) : Les phrases suivantes sont-elles des booléens et si oui quelle est leur valeur de vérité ?**

- 1) π est un nombre décimal.
- 2) Il existe des valeurs x de $\mathbb{R}$ telles que $x^2 - 12 \geq 0$.
- 3) Pour chaque valeur x de $\mathbb{R}$, on a $x^2 - 12 \geq 0$.
- 4) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $x^2 - 12 \geq 0$.
- 5) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\sqrt{x^2 - 4} \geq 0$.

Remarque : en mathématiques, on préfère utiliser le mot **assertion** ou **proposition** au lieu de dire booléen, et on dit que "l'assertion est vérifiée" au lieu de dire "le booléen a la valeur vrai". De même on préfère dire "la proposition n'est pas vérifiée" au lieu de dire "le booléen est faux".

Faire un programme en informatique c'est être capable d'enchaîner une succession de commandes bien choisies dans un certain langage. Faire une démonstration en math, c'est être capable d'enchaîner **dans le bon ordre en justifiant** une succession de booléens VRAIS bien connectés entre eux.

1.1.2 Booléens usuels.

Parmi les booléens usuels il y a **les booléens de comparaison** à savoir :

" =, $\neq$, $\leq$, $\geq$, $<$, $>$ "

Par exemple " $\pi < 0$ " est un booléen de comparaison qui est faux, en revanche " $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ " est un booléen de comparaison qui est vrai.

Les booléens d'appartenance ou d'inclusion sont eux aussi très usuels :

" $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$ "

Par exemple $\frac{1}{12} \in \mathbb{N}$ est un booléen d'appartenance faux.

Dans ce chapitre, on découvrira aussi **les booléens existentiels et les booléens universels** qui sont extrêmement usuels en mathématiques.

■ **Test de compréhension du cours (corrigé en vidéo) : Vrai, faux, aucun sens ou mal rédigé ?**

1) " Soit $x \in \mathbb{R}$ " est un booléen d'appartenance. "

2) " $x^2 \geq 0$ " est un booléen de comparaison vrai.

3) " Soit $x \in \mathbb{Z}$, alors $x \in \mathbb{R}$ ". Dans cette phrase il y a un seul booléen d'appartenance et il est vrai.

4) " $\frac{1}{\sqrt{15} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{12}$ " est un booléen de comparaison vrai.

5) " Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{12}{(x-5)^2} \geq 0$ " est un booléen de comparaison vrai.

1.2 Déclaration de variables.

Pour écrire des mathématiques, on a besoin de variables. Chaque variable qu'on souhaite utiliser dans une démonstration doit être déclarée c'est à dire présentée sans ambiguïté au lecteur avec son nom, l'ensemble usuel auquel elle appartient et ses éventuelles particularités.

1.2.1 Variables déclarées "ponctuellement".

- **Exemple 1 :** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

Il faut comprendre que le x de la première limite n'est pas le x de la seconde. Dans la première limite notre variable x est grande et positive, dans la seconde elle est positive et proche de zéro. Il y a eu deux déclarations sous le symbole limite avec le même nom. C'est possible et logique parce que c'est une variable qui a une durée d'utilisation très courte, elle sert uniquement à exprimer la limite et n'a de sens qu'à l'intérieur de cette limite.

- **Exemple 2 :** $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Ici encore la variable x a une durée d'utilisation très courte, elle est déclarée grâce aux symboles $\int_0^1$ et dx , c'est un élément de $[0; 1]$.

- **Exemple 3 :** La fonction $f(x) = x^2$ est croissante sur $[0; +\infty[$.

Quand on lit cette phrase, on doit comprendre que la variable x est ponctuellement placée dans l'intervalle $[0; +\infty[$. Elle n'est pas figée.

- **Exemple 4 :** Déclaration avec les quantificateurs $\forall$ et $\exists$

Ce point sera expliqué plus tard dans le cours.

1.2.2 Variables déclarées avec le mot " Soit ", affectées, formelles, avec ou sans particularité.

C'est une façon de déclarer qui va figer la variable tout le temps de la démonstration.

- **Exemple 5** : Soit $x = \sqrt{2}$.

La variable x vient d'être déclarée en lui attribuant une valeur, on dit que c'est **une variable affectée**. L'ensemble usuel de x n'est pas précisé mais par défaut on peut considérer que c'est $\mathbb{R}$. (dans un contexte plus détaillé cela pourrait être $\mathbb{C}$...) Désormais, dans toute la démo, si on fait référence à x il faut comprendre que cela fait référence à la valeur $\sqrt{2}$ à moins que le x considéré soit redéclaré ponctuellement dans une intégrale, sous une limite etc...

- **Exemple 6** : Soit $x \in \mathbb{R}$.

Avec cette déclaration, la variable x n'est pas affectée, c'est un réel sans aucune particularité **on dit que c'est une variable formelle de $\mathbb{R}$** .

- **Exemple 7** : Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 - 3 \geq 0$.

Ici la variable x est un réel, elle n'est pas affectée, néanmoins elle a une particularité : elle doit rendre vrai le booléen $x^2 - 3 \geq 0$, du coup, à cause de cette particularité ce n'est pas une variable formelle de l'ensemble $\mathbb{R}$, c'est une variable formelle de l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} \mid t^2 - 3 \geq 0\}$. Ce concept sera précisé et approfondi au chapitre 2.

Il existe un symbole en math pour dire "tel que", c'est la barre verticale $\mid$
Du coup on pourra écrire

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3 \geq 0.$$

Soit E un ensemble. une variable formelle de E est une variable déclarée sans aucune particularité.

1.2.3 Variable déclarée avec ou sans expansion

- **Exemple 8** : Soit $u \in \mathbb{R}^2$.

Ici on a déclaré une variable formelle de l'ensemble $\mathbb{R}^2$ (pas de valeur, pas de particularité). Mais on sait qu'une telle variable est un couple avec deux coordonnées, or ces coordonnées n'ont pas reçus de nom, cela peut faire défaut dans les démonstrations. En fait notre variable u a été déclarée de façon minimaliste (un nom et un ensemble), dans ce cours on dira qu'elle a été déclarée sans expansion mais elle aurait pu être déclarée de façon plus détaillée, avec son expansion :

- (i) Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $u = (x, y)$
- (ii) Soit $u \in \mathbb{R}^2$. Soit $x, y \in \mathbb{R} \mid u = (x, y)$.

Attention, l'expansion d'une variable n'est pas une particularité, c'est juste une façon d'écrire la variable de façon moins courte qu'un simple nom (quand c'est possible).

- **Exemple 9** :

- (i) Soit $u \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$.

variable formelle de $\mathbb{N} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ (pas de valeur, pas de particularité) déclarée sans expansion.

- (ii) Soit $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$ et $u = (n, x, z)$.

variable formelle de $\mathbb{N} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ (pas de valeur, pas de particularité) déclarée avec expansion.

- (iii) Soit $u \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \mid u = (n, x, z)$.

variable formelle de $\mathbb{N} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ (pas de valeur, pas de particularité) déclarée avec expansion.

- Exemple 10 :

(i) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$

P est une variable formelle de l'ensemble des polynômes à coefficients réels déclaré sans expansion.

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$

Cette fois le polynôme formel P est déclaré avec expansion.

(iii) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Soit $n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \mid P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$.

Autre façon de déclarer le polynôme formel P avec une expansion.

1.3 Déclarer un booléen

On utilise ":" et non pas "=" et si la valeur de vérité du booléen dépend d'une autre variable on la fait figurer dans son nom.

- Exemple 1

Soit $P : \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

C'est un booléen d'appartenance, la valeur de vérité est FAUX.

- Exemple 2

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $A(x) : (x-3)(x-12) > 0$.

La lettre x est un réel formel (pas de valeur, pas de particularité) et le booléen de comparaison $(x-3)(x-12) > 0$ a été nommé $A(x)$ car sa valeur VRAI ou FAUX dépend de la valeur du x formel fixé avant, d'où le choix du nom $A(x)$ au lieu de A .

Cette notation est pratique car on peut par exemple écrire que $A(12)$ est faux (puisque pour $x = 12$ le booléen est $0 > 0$ qui est faux).

D'autres notations sont possibles, par exemple A_x au lieu de $A(x)$ l'important étant de faire figurer la variable x .

■ Test de compréhension du cours (correction en vidéo)

a) Déclarer une variable affectée de $\mathbb{Z}$.

b) Déclarer une variable formelle de $\mathbb{Z}$.

c) Soit $n \in \mathbb{Z}$ et soit $u = 2n$.

(i) La variable n est-elle une variable formelle de $\mathbb{Z}$? Est-elle une variable formelle de $\mathbb{R}$?

(ii) La variable u est-elle une variable formelle de $\mathbb{Z}$?

d) Soit $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}, u = (n, p)$ et $v = (2n, p)$

(i) La variable u est-elle une variable formelle de l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.

(ii) Même question avec la variable v .

e) Déclarer une variable affectée de $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ qui n'est pas dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

f) Déclarer une variable réelle qui ne soit ni une variable formelle de $\mathbb{R}$ ni une variable affectée.

g) Déclarer avec expansion de deux façons différentes une variable formelle de $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.

h) On veut déclarer le booléen " $-\sqrt{x-3} < x+4$ ". compléter la phrase suivante :

(i) Soit $x \dots$ et soit le booléen $\dots$

(ii) Quelle est la valeur de ce booléen?

i) Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et soit le booléen $P(x) : \sqrt{x} \leq x-2$.

Quelle est la valeur de $P(1)$? de $P(4)$?

j) Ai-je droit d'écrire les phrases suivantes :

(i) Soit $x = 12$. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \dots$

(ii) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\int_0^x t^{11} dt = \frac{x^{12}}{12}$

- (iii) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\int_0^x x^{11} dx = \frac{x^{12}}{12}$
- (iv) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\int_0^2 x^{11} dx = \frac{2^{12}}{12}$
- (v) Soit $x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 < 0$.
- (vi) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = y^2$

1.4 Négation d'un booléen.

Propriété 1.4.1. Soit un booléen A (formel), alors on peut définir un autre booléen appelé $\text{non}(A)$ et noté $\neg A$ qui est vrai si et seulement si A est faux.

On dit que le "non" est un connecteur logique parce qu'il permet de créer un nouveau booléen.

Voici la table de vérité du "NON" avec FAUX et VRAI qui sont représentés respectivement par 0 et 1. :

A	$\neg A$
0	1
1	0

Voici les négations des booléens usuels de comparaison et d'appartenance

A	$=$	$<$	$\in$	$\leq$	$\subset$
$\neg A$	$\neq$	$\geq$	$\notin$	$>$	$\not\subset$

■ Test de compréhension du cours (correction en vidéo)

Écrire les négations des booléens présents dans les phrases suivantes :

- Soit $x \in \mathbb{R}$ et $A(x) : 2x + 3 > x^2$.
- Soit $(a, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ et $B(a, n) : (1 + a)^n \geq 1 + na$.
- Soit $\varepsilon > 0$, soit $x \in \mathbb{R}$ et $P(\varepsilon, x) : 12 - \varepsilon < x < 12 + \varepsilon$.
- Soit $A : (-5, 12) \in \mathbb{N}^2$.

1.5 Les quantificateurs

Il y en a deux :

1.5.1 Le quantificateur universel.

Le quantificateur $\forall$, appelé **quantificateur universel**, est utilisé pour exprimer une information qui concerne tous les objets d'un ensemble E sans exception. Il peut se lire de plusieurs manières :

Ex 1 : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 12 \geq 0$

- "Pour chaque affectation de x dans $\mathbb{R}$, on a $x^2 + 12 \geq 0$ " ou plus rapidement "pour chaque x dans $\mathbb{R}$, on a $x^2 + 12 \geq 0$ ".

- "Quel que soit l'affectation de x dans $\mathbb{R}$, on a $x^2 + 12 \geq 0$ " ou plus rapidement "Quel que soit x dans $\mathbb{R}$, on a $x^2 + 12 \geq 0$ ".

- "Pour toute affectation de x dans $\mathbb{R}$, on a $x^2 + 12 \geq 0$ " ou plus rapidement "Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a $x^2 + 12 \geq 0$ ".

Cette phrase est un booléen avec la valeur VRAIE car n'importe quelle affectation réelle de x donnera $x^2 \geq 0$ et à fortiori $x^2 + 12 \geq 0$, on dit que c'est un booléen universel parce que dès le début de l'écriture on utilise le quantificateur $\forall$ qui annonce une généralité.

Dans ce booléen il y a un découpage. La première partie de la phrase " $\forall x \in \mathbb{R}$ " sert à déclarer **ponctuellement** la variable x , la seconde partie $x^2 + 12 \geq 0$ est un booléen qui dépend du x déclaré juste avant. Il peut être utile parfois de déclarer ces deux booléens bien distinctement, on peut utiliser la présentation suivante qui a l'avantage d'être rapide et d'afficher le découpage :

Soit $A : \forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{x^2 + 12 \geq 0}_{A(x)}$.

Il faut alors comprendre que A et $A(x)$ sont deux booléens différents. Le booléen universel A prend la valeur vraie uniquement quand $A(x)$ est vrai tout le temps, si le booléen $A(x)$ prend ne serait-ce qu'une fois la valeur faux alors A sera faux.

Ex 2 : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 4 \geq 0$

Déclarons les booléens en affichant le découpage :

Soit $B : \forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{x^2 - 4 \geq 0}_{B(x)}$

Le booléen $B(1)$ est faux car $1^2 - 4 < 0$. Ainsi le booléen universel B est faux.

Bilan rapide :

Un booléen universel peut s'afficher avec un découpage

" $A : \forall x \in E, A(x)$ "

Le booléen universel A est vrai si et seulement si le booléen $A(x)$ est tout le temps vrai.

Le booléen A est faux dès qu'il existe au moins une affectation d'un x de E pour laquelle $A(x)$ faux.

■ Exercice corrigé (correction en vidéo)

Écrire les énoncés usuels suivants à l'aide du quantificateur universel sans chercher à justifier s'ils sont vrais ou faux :

(1) $\sqrt{2}$ est rationnel c'est à dire qu'il est impossible de l'écrire comme le quotient de deux entiers.

(2) La fonction cosinus est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$.

(3) La fonction carrée est minorée par 12 sur $[4; +\infty[$.

(4) La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est majorée par 3.

■ Exercice corrigé (correction en vidéo)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $B(n) : \frac{n}{12} \in \mathbb{N}$. Soit $B : \forall n \in \mathbb{N}, B(n)$.

Donner les valeur de $B(12)$ et $B(4)$. Que peut-on en déduire :

(1) B est parfois vrai.

- (2) B est parfois faux.
- (3) $B(n)$ est parfois faux.
- (4) B est faux.
- (5) $B(n)$ est parfois vrai.
- (6) B est vrai.

1.5.2 Le quantificateur existentiel.

Le quantificateur $\exists$ est utilisé pour exprimer l'existence, la possibilité de déclarer un élément bien choisi dans un ensemble précisé :

$$\text{Ex 3 : } \exists x \in \mathbb{N}, 12 = 2x$$

Plusieurs lectures sont possibles ici aussi :

- " Il existe une affectation de x dans $\mathbb{N}$ tel que $12 = 2x$ " ou plus rapidement " il existe x dans $\mathbb{N}$ tel que $12 = 2x$ ".
- Il est possible de déclarer x dans $\mathbb{N}$ tel que $12 = 2x$.

Cette phrase est un booléen avec la valeur VRAI car si je déclare $x = 6$ qui est bien un entier naturel alors $12 = 2x$ est vrai, on dit que c'est un booléen existentiel parce que dès le début de l'écriture on utilise le quantificateur $\exists$ qui annonce une condition d'existence.

Dans ce booléen il y a de nouveau un découpage. La première partie de la phrase " $\exists x \in \mathbb{N}$ " sert à déclarer la variable x , la seconde partie $12 = 2x$ est un booléen qui dépend du x déclaré juste avant et on peut ici aussi afficher le découpage en déclarant avec deux noms différents et bien choisis nos booléens :

$$\text{Soit } A : \exists x \in \mathbb{N}, \underbrace{12 = 2x}_{A(x)}.$$

On a bien compris que A et $A(x)$ sont deux booléens différents. Le booléen existentiel A prend la valeur vraie dès que $A(x)$ est vrai ne serait ce qu'une fois, et ce booléen existentiel A prendra la valeur faux uniquement quand $A(x)$ est faux tout le temps.

Bilan rapide :

Un booléen existentiel peut s'afficher avec un découpage

$$" A : \exists x \in E, A(x) "$$

Le booléen existentiel A est vrai si et seulement si le booléen $A(x)$ est vraie pour au moins une affectation d'un x de E

Remarque : on a une notation $\exists!$ qui en plus de l'existence affirme l'unicité.

$$\text{Ex 4 : } \exists! x \in \mathbb{N}, 12 = 2x$$

Il existe une unique affectation de x dans $\mathbb{N}$ telle que $12 = 2x$.

Les booléens utilisent souvent les deux symboles avec plusieurs variables, attention à l'ordre car les symboles $\forall$ et $\exists$ ne commutent pas, en changeant l'ordre on change l'information.

Ex 5 : Le booléen existentiel " $A : \exists y \in \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 = y^2$ " n'a pas le même sens que le booléen universel " $B : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 = y^2$ ". En effet on démontrera que A est faux tandis que B est vrai.

Phrases mathématiques usuelles :

(i) Savoir écrire avec des quantificateurs qu'un réel x préalablement déclaré est rationnel : booléen existentiel.

$$"\exists(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, x = \frac{a}{b}"$$

(ii) Savoir écrire qu'une suite (u_n) est majorée par un réel M : booléen universel (la majoration doit être valable pour tous les termes de la suite donc pour tous les indices)

$$"\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M"$$

(iii) Savoir écrire qu'une suite (u_n) est majorée : booléen existentiel.

$$"\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M"$$

(iv) On a des phrases similaires pour la notion de minoration.

De façon similaire aussi, on doit savoir écrire avec des quantificateurs qu'une fonction est majorée sur un intervalle I déclaré :

$$"\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M"$$

■ Exercice corrigé (correction en vidéo)

Écrire les énoncés suivants à l'aide de quantificateurs sans chercher à justifier s'ils sont vrais ou faux :

- (1) Le carré de tout réel est positif ou nul.
- (2) Il existe des réels qui sont strictement supérieurs à leur carré.
- (3) Aucun entier relatif n'est supérieur à tous les autres.
- (4) Les réels ne sont pas tous des quotients d'entiers naturels.
- (5) Aucun réel n'est un quotient d'entiers relatifs.
- (6) Il existe un réel dont la somme avec n'importe quel autre réel est toujours strictement positive.
- (7) Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.
- (8) Étant donné trois réels non nuls, il y en a au moins deux de même signe.
- (9) Pour chaque réel, on peut trouver un réel tel que la somme des deux soit strictement positive.

1.5.3 Négation des booléens quantifiés.

Propriété 1.5.1. Soit E un ensemble, et $A(u)$ une assertion sur une variable u de E .

(i) Étant donné un booléen universel A avec la structure " $\forall u \in E, A(u)$ " la négation de A est le booléen $\neg A : \exists u \in E, \neg A(u)$

(ii) Étant donné un booléen existentiel A avec la structure " $\exists u \in E, A(u)$ " la négation de A est le booléen $\neg A : \forall u \in E, \neg A(u)$

Ex 1 : Soit $A : \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ alors $\neg A : \exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$

Ex 2 : Soit $A : \exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 12 = 0$ alors $\neg A : \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 12 \neq 0$

■ Exercice corrigé (correction en vidéo)

Écrire avec des quantificateurs la négation des booléens suivants :

- (1) $\forall x \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}$
- (2) $\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$
- (3) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m \text{ divise } n$
- (4) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m \text{ divise } n$
- (5) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n \text{ divise } m$
- (6) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |\cos(x)| \leq M$
- (7) $\sqrt{2}$ est rationnel.
- (8) La fonction sinus est majorée par $\frac{1}{12}$ sur $\mathbb{R}$.
- (9) La fonction cosinus est minorée par 0 sur $\mathbb{R}$.

1.6 Principes fondamentaux de rédaction mathématique.

1.6.1 La démonstration par une succession d'équivalences.

Définition 1.6.1. On dit que deux booléens A et B sont équivalents, et on note $A \iff B$, lorsque A et B sont simultanément vrais et simultanément faux.

Cette rédaction peut être utilisée si on voit une reformulation du booléen équivalente et telle que la valeur de vérité devient évidente.

Parmi les équivalences usuelles, il est indispensable de savoir que si f est une fonction définie et croissante sur un intervalle I et si a et b sont dans I alors $a \leq b \iff f(a) \leq f(b)$.

De même, si f est une fonction définie et décroissante sur un intervalle I et si a et b sont dans I alors $a \leq b \iff f(a) \geq f(b)$.

On a d'autres équivalences avec les inégalités strictes quand la fonction est strictement monotone.

■ Exercice corrigé (correction en vidéo)

Soit $a, b \in \mathbb{R}^+$. Montrer par équivalence que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

1.6.2 La démonstration par une succession d'égalités.

On reformule un objet mathématique qui n'est pas un booléen.

■ Exercice corrigé (correction en vidéo)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b$.

1.6.3 Prouver qu'un booléen universel est vrai

Quelle est la rédaction attendue pour prouver qu'un booléen universel est vrai ?

Pour prouver qu'un booléen universel affichée en " $A : \forall u \in E, A(u)$ " est vrai, on commence en déclarant une variable formelle u de E **avec le mot soit**. Cette variable u devient donc figée pendant toute la démonstration. Ensuite on trouve les arguments qui prouvent que le booléen $A(u)$ est vrai.

■ Exercice corrigé (correction en vidéo)

Montrer que " $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n-1)$ est pair".

1.6.4 Prouver qu'un booléen existentiel est vrai.

Quelle est la rédaction attendue pour une preuve d'assertion existentielle ?

C'est plus compliqué, il y a plusieurs façons de répondre, on va en proposer deux dans ce cours.

Soit un booléen existentiel affiché en $A : \exists u \in E, A(u)$. On veut prouver que A est vrai.
Méthode 1 : Déclarer u dans E correctement AFFECTÉ de façon à pouvoir argumenter que $A(u)$ est vrai. Cette méthode nécessite d'avoir de l'intuition pour trouver une bonne façon d'affecter u .

Méthode 2 : l'analyse/synthèse qui se présente en deux étapes. Dans la première étape (l'analyse), on déclare u formel dans E puis on analyse, par équivalence ou pas, ce que veut dire $A(u)$ vrai jusqu'à avoir l'intuition d'une affectation de u qui pourrait convenir. Dans la deuxième étape, la synthèse, on redéclare u affecté et on explique rapidement pourquoi il convient. Cette méthode peut être utilisée quand on n'a pas d'intuition pour appliquer la méthode 1.

■ Exercice corrigé (correction en vidéo)

- 1) Montrer grâce à votre intuition que le booléen $\exists x \in \mathbb{R} \mid \sin x = x$ est vrai.
- 2) Montrer par analyse/synthèse que le booléen suivant est vrai :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y < 0 \mid x^2 + x + 1 = y^2$$

Pouvait-on proposer une preuve par intuition ? Si oui la rédiger.

- 3) Soit le booléen $A : \exists(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, \frac{5x+1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$

Montrer que A est vrai par analyse/synthèse.

Pouvait-on proposer une preuve par intuition ? Si oui la rédiger.

1.6.5 Prouver qu'un booléen est faux

Méthode 1 : Prouver que la négation de ce booléen est vrai.

Méthode 2 : faire une démonstration par l'absurde en supposant le booléen vrai et aboutir à une contradiction, quelque chose de clairement faux.

■ Exercice corrigé (correction en vidéo)

- a) Soit $A : \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \mid y = x^2$.
 - (i) Montrer que A est faux en prouvant que sa négation est vraie.
 - (ii) Faire une nouvelle preuve de A faux avec une démonstration par l'absurde.
- b) Montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

1.7 Variables muettes (liées) ou parlantes (libres).

1.7.1 Variables muettes

On a vu que certaines variables sont déclarées ponctuellement "à l'intérieur" d'un objet mathématique.

Ex 1 : $\int_0^2 2x dx = 4$

C'est le symbole $\int_0^2 \dots dx$ qui déclare la variable x et nous indique son appartenance à l'ensemble $[0; 2]$.

On voit que dans le résultat final il n'y a pas la variable x , on dit que x est une **variable muette pour cette intégrale**, ça veut dire que l'intégrale ne dépend pas de x . Le symbole $\int_0^2 \dots dx$ qui a permis de déclarer x est qualifié de **symbole mutificateur**.

Les symboles mutificateurs sont nombreux en math : les limites, le symbole $\sum$ pour les sommes, **les quantificateurs** $\forall$ et $\exists$, les notations ensemblistes $\dots$, etc ...

Par exemple, si on considère le booléen $A : \forall x \in [-1, 1] \ x^2 \leq 1$ la variable x est muette pour ce booléen à cause du symbole mutificateur $\forall$.

Quand une variable est muette pour un objet mathématiques c'est que la valeur de cet objet ne dépend pas d'elle, on peut alors changer le nom de la variable et avoir la même information :

Ex 2 : $\int_0^2 2x dx = \int_0^2 2y dy$

Ex 3 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ a le même sens que $\lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-y} = 0$.

1.7.2 Variable parlante

Soit $A : \forall x \in [-1, 1] \ \underbrace{x^2 \leq 1}_{A(x)}$.

La variable x est muette pour le booléen A (le symbole mutificateur est " $\forall$ ") mais elle ne l'est pas pour le booléen $A(x)$ (pas de symbole mutificateur). On dit que x est une variable parlante pour le booléen $A(x)$. C'est ainsi que la valeur de vérité du booléen A ne dépend pas de la variable x qui est muette pour A alors que celle du booléen $A(x)$ (comme son nom l'indique) peut en dépendre.

Quand on déclare une variable avec le mot "SOIT ...", qu'elle soit affectée ou pas, elle devient parlante pour les objets mathématiques qui l'utilisent et cela jusqu'à la fin de la démonstration.

1.8 Autres objets mathématiques usuels dont il faut maîtriser la déclaration.

1.8.1 Les fonctions

■ Soit $f(x) = (x^2 + 12)\sqrt{x}$.

Dans cet exemple, on comprend qu'on vient de déclarer une fonction f en lui affectant une formule bien précise. La variable x utilisée pour présenter f est muette pour f , on aurait pu écrire soit $f(t) = (t^2 + 12)\sqrt{t}$ et ce serait toujours la même fonction f .

Par défaut on va considérer que la variable x est réelle (mais finalement on observe que rien n'est précisément écrit pour la variable x). Avec cette considération, on observe donc que f est une fonction d'une variable réelle à valeur réelle.

Quand une fonction est déclarée ainsi, il faut aussitôt prendre l'initiative de déclarer D_f le domaine de définition de f .

On pourra donc écrire par exemple : Soit $f(x) = (x^2 + 12)\sqrt{x}$. Alors $D_f = [0; +\infty[$ et en écrivant cela on indique que la variable muette x doit être dans l'ensemble $[0; +\infty[$ pour que $f(x)$ ait un sens.

■ Soit $g(x) = \frac{x+12}{x-5}$ sur $]5; +\infty[$

Avec cette phrase on déclare encore une fonction g d'une variable réelle à valeurs réelle en lui affectant une formule précise mais on précise en plus que la variable muette x est considérée dans $]5; +\infty[$ seulement dans la suite de l'exercice.

■ Soit $h(x) = x + i(x - 12)$ où $x \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$

Ici on a déclaré par affectation une fonction d'une variable réelle à valeur complexe.

On doit observer tout de suite $D_h = \mathbb{R}$.

■ Soit $t((x, y)) = \frac{y}{x-12}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

Ici on a déclaré une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles.

On doit observer tout de suite que $D_t = \mathbb{R} \setminus \{12\} \times \mathbb{R}$ (puisque le dénominateur $x - 12$ de la fraction ne doit pas s'annuler).

1.8.2 Les applications.

■ Soit $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \ln x + 12$

Ici on vient de déclarer par affectation **une application** f . Non seulement on a attribué une formule précise à f mais on lui a aussi attribué un ensemble de départ (à savoir $]0; +\infty[$) et un ensemble d'arrivée (c'est $\mathbb{R}$) cohérents avec la formule, c'est à dire que pour chaque affectation de la variable x dans l'ensemble de départ, on a bien $f(x)$ qui est défini d'une part, et $f(x)$ est un élément de l'ensemble d'arrivée d'autre part.

La fonction f déclarée ainsi est un élément particulier de l'ensemble des applications de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$, on peut le dire en écrivant $f \in \mathcal{F}(]0; +\infty[, \mathbb{R})$.

Les applications sont donc déclarées beaucoup plus précisément que les fonctions, la variable utilisée reste muette pour l'application.

■ Soit $f \in \mathcal{F}([12; +\infty[, \mathbb{R}^+)$

On vient ici de déclarer une application f formelle de l'ensemble $\mathcal{F}([12; +\infty[, \mathbb{R}^+)$, on n'a pas de formule précise, on sait simplement que la variable x doit être un élément de $[12; +\infty[$ et que $f(x)$ sera un réel positif.

■ Exercice corrigé (correction en vidéo)

(1) Soit $f(x) = x^2 \ln(x - 3)$.

Que vient-on de déclarer ? Que faut-il aussitôt faire ? Faites-le.

(2) Soit $g(x) = \cos x + i \sin x$.

Que vient-on de déclarer ? Que faut-il aussitôt faire ? Faites-le.

(3) Soit $h :]12; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \frac{x}{x-8}$

Que vient-on de déclarer ? Est-ce que j'ai le droit de considérer $h(5)$?

(4) Soit $t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \frac{x}{x-8}$

Que vient-on de déclarer ?

(5) Soit $k :]-\infty; 8[\longrightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \longmapsto \frac{x}{x-8}$

Que vient-on de déclarer ?

(6) Déclarer une application formelle de l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1.8.3 Les équations ou inéquations

Soit l'équation $(E) : x^2 + x + 1 = 0$ sur $\mathbb{R}$

On a déclaré ici une équation en précisant que l'inconnue x est de type réelle (sans cette précision, on pourrait aussi s'intéresser à une inconnue x de type complexe par exemple). l'inconnue x est muette pour l'équation (E) .

Une équation c'est un booléen de comparaison. Résoudre l'équation c'est chercher les affectations des inconnues qui rendent le booléen de comparaison vrai, ces affectations sont les solutions de l'équation.

Comme pour les fonctions, on commence toujours par déclarer le domaine de définition de l'équation $D_{(E)}$, c'est à dire le domaine pour lequel les formules qu'on observe ont du sens.

Ensuite on résout sur $D_{(E)}$, souvent par équivalences successives jusqu'à pouvoir proposer l'ensemble des solutions de (E) . **Attention à bien tenir compte de $D_{(E)}$ pour le bilan.**

Parfois on est amené à faire une résolution par découpage de $D_{(E)}$ en plusieurs intervalles I_k ce qui conduit alors à des ensembles $Sol_{(E)} \cap I_k$ avant de pouvoir produire $Sol_{(E)}$.

■ Exercice corrigé (correction en vidéo)

- a) Résoudre l'équation $(E_1) : \sqrt{x+1} = x$ sur $\mathbb{R}$.
- b) Résoudre l'équation $(E_2) : x^2 + 3x + 4 = 0$ sur $\mathbb{R}$.
- c) Résoudre l'inéquation $(E_3) : \sqrt{x+3} < x$ sur $\mathbb{R}$.

1.8.4 Les équations à paramètre

Ce sont des équations qui mettent en scène, en plus de leur(s) inconnue(s) une variable parlante formelle déclarée avant l'équation que l'on appelle un paramètre.

■ Soit $m \in \mathbb{R}$.

Soit $(E) : (m-1)x + 3 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Dans cet exemple, la variable m est déclarée avant (E) , elle est parlante pour (E) alors que l'inconnue x est muette pour (E) . Notre équation (E) est donc une équation à paramètre, et il aurait d'ailleurs été plus judicieux de la baptiser (E_m) pour montrer sa dépendance envers le paramètre m .

Souvent il va falloir envisager une discussion sur le paramètre m pour résoudre. Il ne faut pas confondre cette discussion avec un découpage d'intervalle de $D_{(E)}$ parfois nécessaire.

■ Exercice corrigé (correction en vidéo)

- 1) Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit (E_a) l'équation $ax + 5 = x - 7$ d'inconnue x réelle.
Résoudre (E_a) .
- 2) Soit $m \in \mathbb{R}$. Soit $(E_m) : (m-1)x + 3 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
Résoudre (E_m) .
- 3) Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $(E_a) : \frac{a}{x} = 0$ d'inconnue x réelle.
résoudre (E_a) .

Chapitre 1 : Exercices de cours

Ces exercices seront corrigés en cours uniquement, pas de vidéo.

Exercice 1 :

On définit une opération notée $*$ entre deux réels x et y en posant $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- a) Quelle est la valeur de vérité du booléen $\sqrt{3} * 3 = \sqrt{12}$? Quelle est celle du booléen $0 * (-2) = 0$?
- b) Montrer que le booléen $A : " \forall x, y \in \mathbb{R}, x * y \in \mathbb{R}^+ "$ est vrai.
- c) Soit le booléen $B : " \exists e \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}^+, x * e = x "$. Montrer que B est vrai.
- d) Soit le booléen $C : " \exists e \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, x * e = x "$. Montrer que C n'est pas vrai.
- e) Soit l'assertion $D : " \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid x * y = 0 "$. Montrer que D est faux.

Exercice 2 :

On rappelle que la notation $a|b$ quand a et b sont des entiers relatifs signifie que a est un diviseur de b .

Écrire les négations de chacun des booléens suivants puis déterminer lequel des deux est vrai. Faire la preuve.

- (1) $\forall \varepsilon > 0, \exists a > 0 \mid a < \varepsilon$
- (2) $\exists n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{N}^*, n|m$
- (3) $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \exists m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \mid m|n$
- (4) $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, |\cos(x)| \leq M$
- (5) $\exists n \in \mathbb{N}^* \mid \forall m \in \mathbb{N}^*, m|n$
- (6) $\exists a > 0 \mid \forall \varepsilon > 0, a < \varepsilon$
- (7) $\forall \varepsilon \geq 0, \exists a > 0 \mid a < \varepsilon$

Exercice 3 :

1) Soit a et b deux réels. Quelle est la condition à vérifier pour que l'équivalence " $a = b \iff a^2 = b^2$ " soit vraie?

2) Résoudre les trois équations suivantes d'inconnue x réelle.

- a) $(E_1) : \sqrt{2x+1} = -\sqrt{x}$
- b) $(E_2) : \sqrt{2x+1} = \sqrt{x-3}$
- c) $(E_3) : 2\sqrt{x+3} + 6 = 2x - 2$

Exercice 4 :

Soit a et b deux réels et $(E_{a,b}) : ax + 2 = 3x + b$ d'inconnue x réelle.

Résoudre $(E_{a,b})$.

Chapitre 2

Déclarer un ensemble, sous-ensembles usuels

2.1 Les ensembles usuels

Les objets mathématiques, tout comme les objets informatiques, ont un **type**, c'est à dire une appartenance à un ensemble de référence, dit usuel qu'on utilise souvent pour déclarer nos objets.

Les "nombres usuels" :

- $12 \in \mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels (c'est-à-dire entiers positifs ou nuls) ;
- $-12 \in \mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs (c'est-à-dire entiers positifs, négatifs ou nuls) ;
- $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, c'est à dire les nombres qui peuvent s'écrire (de façon non unique) sous la forme d'un quotient de deux entiers relatifs ;
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, il est constitué des rationnels et des nombres irrationnels.
- $3 - 12i \in \mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, tout nombre complexe s'écrit de façon unique sous la forme $x + iy$ avec x et y dans $\mathbb{R}$.

On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Les n -uplets : $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Ce sont des objets qui appartiennent à des produits cartésiens d'ensembles usuels basiques :

- Les 2-uplets sont appelés couples : $(\pi, -5) \in \mathbb{R}^2$, $(\frac{1}{12}, -8) \in \mathbb{Q}^2$, $(-5, 3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ etc ...
- Les 3-uplets sont appelés triplets : $(-5, \pi, \sqrt{2}) \in \mathbb{R}^3$ etc ...
- $(1 - i, 12, -7, 3i) \in \mathbb{C}^4$

Nous verrons très rapidement d'autres ensembles usuels, $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ qui nous servira à déclarer une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais aussi $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes formels à coefficients réels ou encore $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients complexes et bien d'autres ...

Selon l'ensemble, on a vu au chapitre 1 qu'il peut être utile de déclarer les variables avec une expansion.

2.2 Les parties (sous-ensembles) des ensembles usuels.

En mathématiques, on a très souvent besoin de décrire des sous-ensembles inclus dans des ensembles de référence. Trois notations sont utilisées pour décrire des sous-ensembles qui utilisent toutes des accolades $\{ \}$:

2.2.1 L' énumération des éléments dans le cas d'un ensemble fini

Lorsque l'ensemble est fini avec peu d'éléments (et uniquement dans ce cas), on peut le décrire en énumérant ses éléments. Par exemple, $E = \{4; 5; -12\}$ ou $F = \{12; i\}$ ou $G = \{(1, 3); (-5, 12)\}$.

Pour dire qu'un ensemble fait partie d'un autre ensemble on utilise le symbole $\subset$ et non pas le symbole $\in$

Ex 1 : On observe que $E \subset \mathbb{Z}$, $F \subset \mathbb{C}$, $G \subset \mathbb{R}^2$.

Un ensemble constitué d'un seul élément s'appelle un singleton. Le nombre d'éléments d'un ensemble fini A s'appelle le cardinal de A .

Ex 2 : $\text{Card}(E) = 3$, $\text{card}(F) = 2$, $\text{card}(G) = 2$ (car il y a deux couples dans G).

■ Exercice corrigé (correction en vidéo)

- 1) Déterminer l'ensemble des diviseurs positifs de 12 ainsi que son cardinal.
- 2) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $(E) : x^2 - 3x + 2$ d'inconnue x réelle.

2.2.2 L'écriture dite $\{ \text{type} \mid \text{condition} \}$

C'est une écriture structurée en $\{ \text{variable formelle d'un ensemble usuel} \mid \text{booléen} \}$. Un tel ensemble contient les variables de l'usuel qui ont la particularité de rendre le booléen associé vrai.

Exemple :

$$\text{Soit } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 3\}$$

On observe que la variable D est déclarée par une affectation avec des accolades, c'est donc un ensemble.

Juste après l'accolade ouvrante on observe une variable formelle de $\mathbb{R}^2$, à savoir (x, y) , écrite en expansion, puis le booléen $x - 2y = 3$ associé à ce nom de variable, il s'agit donc bien d'un ensemble $\{ \text{type} \mid \text{condition} \}$. Il faut alors comprendre que l'ensemble D est la partie de $\mathbb{R}^2$ qui contient les éléments (x, y) de $\mathbb{R}^2$ qui ont la particularité de rendre vrai le booléen $x - 2y = 3$.

La variable (x, y) déclarée juste après l'accolade est muette pour l'ensemble D , les accolades d'ensemble jouent le rôle de symbole mutificateur on a donc le droit d'écrire $D = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a - 2b = 3\}$. Le booléen en revanche dépend du (x, y) considéré.

Pour savoir si une variable donnée de $\mathbb{R}^2$ est un élément de D ou pas il suffit de déterminer la valeur de vérité du booléen associé. Par exemple, soit $u = (-1, 3)$, j'observe que $-1 - 2 \times 3 = -7$, c'est différent de 3. Ainsi je constate $u \notin D$. Par contre si je considère $v = (3, 0)$ alors je vais pouvoir observer que $3 - 2 \times 0 = 3$ ce qui prouve que $v \in D$.

Pour déclarer une variable formelle de D sans expansion il suffit d'écrire " soit $u \in D$ ", mais souvent on a besoin de déclarer u avec une expansion en insistant sur sa particularité. Il y a plusieurs façons de faire.

- (i) Soit $u \in D$. Soit $a, b \in \mathbb{R} \mid u = (a, b)$. Alors $a - 2b = 3$.
- (ii) Soit $u = (a, b) \in D$. Alors $a - 2b = 3$.
- (iii) Soit $a, b \in \mathbb{R} \mid a - 2b = 3$ et soit $u = (a, b) \in D$.

■ **Exercice corrigé (correction en vidéo)**

- 1) Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 12y = 5\}$.
 - (i) Est-ce que $(5, 0, 0) \in A$?
 - (ii) Est-ce que $(1, 3) \in A$?
 - (iii) Est-ce que $(5, 0) \in A$?
- 2) Soit $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 12y + z = 0 \text{ et } x - y = 3\}$.
 - (i) Est-ce que $(5, 0) \in B$?
 - (ii) Est-ce que $(1, 0, -1) \in B$?
 - (iii) Est-ce que $(3, 0, -3) \in B$?
- 3) Soit $C = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, x = 3k\}$
 - (i) Est-ce que $(5, 0) \in C$?
 - (ii) Est-ce que $2 \in C$?
 - (iii) Est-ce que $12 \in C$?
- 4) Soit $D = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \exists k \in \mathbb{R}, u = k(-3, 12)\}$
 - (i) Est-ce que $(5, 0) \in D$?
 - (ii) Est-ce que $2 \in D$?
 - (iii) Est-ce que $(0, 0) \in D$?

■ **Exercice corrigé (correction en vidéo)**

- 1) Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 12y = 5\}$.
 - (i) Déclarer une variable affectée de A .
 - (ii) Déclarer une variable formelle de A avec expansion et la particularité affichée.
- 2) Soit $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 12y + z = 0 \text{ et } x - y = 3\}$.
 - (i) Déclarer une variable affectée de B .
 - (ii) Déclarer une variable formelle de B avec expansion et la particularité affichée.
- 3) Soit $C = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, x = 3k\}$
 - (i) Déclarer une variable affectée de C .
 - (ii) Déclarer une variable formelle de C en expansion et avec la particularité affichée.
- 4) Soit $D = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \exists k \in \mathbb{Z}, u = k(-3, 12)\}$
 - (i) Déclarer une variable affectée de D .
 - (ii) Déclarer une variable formelle de D avec expansion et la particularité affichée.

2.2.3 L'écriture dite { forme ; type } ou paramétrique ou explicite

C'est une écriture structurée en { objet mathématique | variable(s) d'un usuel annexe }. Ces ensembles peuvent toujours se reformuler en { type | booléen existentiel }.

Exemple

Soit $E = \{(x, 12x) ; x \in \mathbb{R}\}$

On observe bien que la variable E est déclarée par une affectation avec des accolades, c'est donc un ensemble.

Juste après l'accolade ouvrante on observe un objet mathématique, à savoir $(x, 12x)$ qui n'est pas déclaré dans un ensemble usuel. Par contre la variable x utilisée est déclarée après,

c'est une variable formelle de l'ensemble usuel $\mathbb{R}$. Il s'agit donc d'un ensemble $\{ \text{forme} ; \text{type} \}$. La variable x n'est pas à priori une variable de E , ni même de l'usuel qui contient E , c'est une variable annexe qui sert à construire des objets de E . Par exemple, si j'affecte $x = 2$, alors l'objet écrit avec x devient $(x, 12x) = (2, 24)$ et je reconnais un objet de l'usuel $\mathbb{R}^2$.

Une fois que j'ai compris dans quel usuel se situe E , je peux éventuellement le reformuler en ensemble $\{ \text{type} \mid \text{booléen existentiel} \}$. C'est l'ensemble des variables u de l'usuel $\mathbb{R}^2$ pour lesquelles il existe une variable annexe réelle x telle que $u = (x, 12x)$:

$$E = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \exists x \in \mathbb{R}, u = (x, 12x)\}$$

La variable x est muette pour E , on a donc le droit d'écrire $E = \{(a, 12a) ; a \in \mathbb{R}\}$.

Pour déclarer une variable de E affectée il suffit de déclarer une variable annexe affectée puis l'objet associé. Par exemple, soit $a = -4$ et $u = (-4, -48) \in E$.

Pour déclarer une variable formelle de E en expansion il suffit de commencer par déclarer des variables annexes formelles puis l'objet construit avec :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $u = (a, 12a) \in E$.

Ou alors :

Soit $u \in E$ et $a \in \mathbb{R} \mid u = (a, 12a)$.

Déterminer si une variable donnée u de $\mathbb{R}^2$ est dans E ou pas c'est déterminer s'il est possible ou pas d'affecter une variable annexe a telle que $u = (a, 12a)$. On utilise souvent l'intuition, l'observation, l'analyse/synthèse ou une rédaction par l'absurde pour répondre. Par exemple, soit $u = (3, 36)$ et soit $v = (5, 8)$. est-ce que u et v sont des élément de E ?

(i) Soit $a = 3$. j'observe que $u = (a, 12a)$ ainsi $u \in E$. (La déclaration de a est trouvée par intuition après observation rapide.)

(ii) Soit $b \in \mathbb{R}$.

Analyse : $v = (b, 12b) \iff b = 5$ et $12b = 8$ ce qui est un système sans solution.

Synthèse : il n'y a pas d'affectation possible de b qui rende vrai $v = (b, 12b)$ donc $v \notin E$.

(iii) On peut observer qu'un couple de E a sa deuxième coordonnée égale à 12 fois la première. Ainsi si on suppose $v \in E$ on devrait avoir $8 = 12 \times 5$ ce qui n'est pas le cas. Donc $v \notin E$.

■ Exercice corrigé (correction en vidéo)

1) Soit $A = \{(x - 12, 2x - 8) ; x \in \mathbb{R}\}$.

(i) Déclarer une variable affectée de A .

(ii) Déclarer une variable formelle de A en expansion.

2) Soit $B = \{(x - 2y, 2y, x + y) ; x, y \in \mathbb{R}\}$.

(i) Déclarer une variable affectée de B .

(ii) Déclarer une variable formelle de B en expansion.

3) Soit $C = \{\sqrt{2}k ; k \in \mathbb{Z}\}$

(i) Déclarer une variable affectée de C .

(ii) Déclarer une variable formelle de C en expansion.

4) Soit $D = \{(x, x^2) ; x \in \mathbb{R}\}$

(i) Déclarer une variable affectée de D .

(ii) Déclarer une variable formelle de D en expansion.

■ **Exercice corrigé (correction en vidéo)**

1) Soit $A = \{(x - 12, 2x - 8) ; x \in \mathbb{R}\}$.

(i) A-t-on $12 \in A$?

(ii) A-t-on $(0, 0) \in A$?

(iii) A-t-on $(-11, -6) \in A$?

2) Soit $B = \{(x - 2y, 2y, x + y) ; x, y \in \mathbb{R}\}$.

(i) A-t-on $(1, 3) \in B$?

(ii) A-t-on $(0, 0, 0) \in B$?

(iii) A-t-on $(1, 2, 3) \in B$?

3) Soit $C = \{\sqrt{2}k ; k \in \mathbb{Z}\}$

(i) A-t-on $2 \in C$?

(ii) A-t-on $-3\sqrt{2} \in \mathbb{C}$?

4) Soit $D = \{(x + 2, x^2) ; x \in \mathbb{R}\}$

(i) A-t-on $12 \in D$?

(ii) A-t-on $(3, -9) \in D$?

(iii) A-t-on $(5, 9) \in D$?

2.3 Sous-ensemble usuels

2.3.1 Les droites de $\mathbb{R}^2$.

Propriété 2.3.1.

Soient a, b, α, β des réels tels que $\vec{u}(\alpha, \beta)$ soit non nul. L'ensemble E défini par :

$$E = \{(a, b) + x(\alpha, \beta) ; x \in \mathbb{R}\}$$

est la droite du plan $\mathbb{R}^2$ qui passe par $A(a, b)$ et dirigée par $\vec{u}(\alpha, \beta)$.

2.3.2 Les droites de $\mathbb{R}^3$.

Propriété 2.3.2.

Soient $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ des réels tels que $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ soit non nul. L'ensemble E défini par :

$$E = \{(a, b, c) + x(\alpha, \beta, \gamma) ; x \in \mathbb{R}\}$$

est la droite de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui passe par $A(a, b, c)$ et dirigée par $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$.

2.3.3 Les plans de $\mathbb{R}^3$.

Propriété 2.3.3.

Soient $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ des réels et l'ensemble E défini par :

$$E = \{(a, b, c) + x(\alpha, \beta, \gamma) + y(\alpha', \beta', \gamma') ; x, y \in \mathbb{R}\}$$

Si $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$ ne sont pas colinéaires, alors E est le plan de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui passe par $A(a, b, c)$ dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Sinon, E est la droite de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui passe par $A(a, b, c)$ dirigée par $\vec{u}$.

■ Exercice corrigé (correction en vidéo)

Déterminer les ensembles suivants :

- (1) $E_1 = \{(x - 7, 8, 12 - x) ; x \in \mathbb{R}\}$.
- (2) $E_2 = \{(2x - 7, 3x + 12) ; x \in \mathbb{R}\}$.
- (3) $E_3 = \{(2x - 3y + 5, 3x + 12, y - x - 5) ; x, y \in \mathbb{R}\}$.
- (4) $E_4 = \{(x + 2y + 1, 2x + 4y, 3x + 6y - 2) ; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

2.3.4 Les parties de $\mathbb{R}^2$ délimitées grâce à des courbes de fonction

Soit I un intervalle et f, g deux fonctions définies sur I à valeurs réelles. Alors :

1) L'ensemble $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y = f(x)\} = \{(x, f(x)) ; x \in I\}$ correspond géométriquement dans le plan $\mathbb{R}^2$ à la portion de courbe de f délimitée par l'intervalle I .

2) L'ensemble $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \text{ et } y < f(x)\}$ correspond géométriquement dans le plan $\mathbb{R}^2$ à la portion délimitée verticalement par les extrémités de I et située en dessous de la courbe de f

3) L'ensemble $E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y > f(x)\}$ correspond géométriquement dans le plan $\mathbb{R}^2$ à la portion délimitée verticalement par les extrémités de I et située au dessus de la courbe de f .

4) L'ensemble $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, g(x) < y < f(x)\}$ est vide si $f \leq g$ sur I . Sinon il correspond géométriquement à la portion située en dessous de la courbe de f et au dessus de la courbe de g sur la partie de I où $f > g$ est vérifiée.

■ Exercice corrigé (correction en vidéo)

Déterminer géométriquement les ensembles suivants :

- (1) $A = \{(x, x^3) ; x \geq 0\}$
- (2) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; -1 \leq x \leq 2 \text{ et } y \geq 2x - 1\}$
- (3) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 < x \leq 2 \text{ et } \frac{1}{x} < y < x\}$

2.3.5 Les parties de $\mathbb{R}^2$ délimitées par un cercle

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 < r^2\}$ est le disque ouvert de centre $A(a, b)$ et de rayon r .

$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 > r^2\}$ est l'extérieur du disque ouvert de centre $A(a, b)$ et de rayon r .

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2\}$ est le cercle de centre $A(a, b)$ et de rayon r .

2.3.6 Les parties de $\mathbb{R}$ données par les images d'une fonction

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur l'intervalle I et à valeurs réelles.

L'ensemble $E = \{f(x) ; x \in I\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ noté $f(I)$ et appelé image de I par f .

Si f est continue sur l'intervalle I , alors $f(I)$ est un intervalle (théorème des valeurs intermédiaires).

Exemple : Soit $E = \{x^2 ; x \in [-2; 3]\}$.

Soit $f(x) = x^2$, alors $E = f([-2; 3]) = [0; 9]$.

■ Exercice corrigé (correction en vidéo)

Déterminer géométriquement les ensembles suivants.

(1) $A = \{\ln x ; x \in]0; 12]\}$

(2) $B = \{(x, \ln x) ; x \in]0; 12]\}$

(3) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+3)^2 + (y-5)^2 = 7\}$

2.4 Inclusion d'ensembles, égalité d'ensembles

Propriété 2.4.1.

(i) Soit A et B deux parties d'un ensemble E . Alors :

$$A \subset B \iff A = \emptyset \text{ ou } \forall a \in A, a \in B$$

(ii) Soit A et B deux parties **non vides** d'un ensemble E . Alors :

$$A \subset B \iff \forall a \in A, a \in B$$

Très souvent, les ensembles sont visiblement non vides et on utilise donc l'équivalence (ii) pour montrer qu'il y a inclusion ou pas.

■ Exercice corrigé (correction en vidéo)

Soit $A = \{(y-2, y, 2y-5) ; y \in \mathbb{R}\}$. Soit $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=3 \text{ et } 2y-z=5\}$

Montrer que $A \subset B$

Propriété 2.4.2.

Soit A et B deux parties d'un ensemble E . Alors :

$$A = B \iff A \subset B \text{ et } B \subset A$$

■ Exercice corrigé (correction en vidéo)

Soit $A = \{(y-2, y, 2y-5) ; y \in \mathbb{R}\}$. Soit $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=3 \text{ et } 2y-z=5\}$

Montrer que $A = B$.

Remarque : Certaines égalités entre deux ensembles sont immédiates et évidentes, auquel cas on écrit l'égalité sans passer par une double inclusion.

Exemple :

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 12y = 3\} = \{(3 + 12y, y) ; y \in \mathbb{R}\} \text{ (égalité évidente)}$$

Chapitre 2 : Exercices de cours

Ces exercices seront corrigés en cours uniquement, pas de vidéo.

Exercice 5 :

Soit $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y + z = 0\}$.

(i) Est-ce que $(0, 0, 0) \in A$?

(ii) Déclarer en justifiant une variable parlante affectée de A ayant pour première coordonnée 2.

(iii) Déclarer une variable parlante non affectée de A en affichant un maximum d'informations.

(iv) Soit le booléen $P : \forall u \in A, \exists u \in A$

Montrer que P est vraie.

Exercice 6 :

Soit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y = 12\}$.

(i) Est-ce que $(-1, 3) \in B$?

(ii) Déclarer une variable parlante affectée de B en justifiant.

(iii) Déclarer une variable parlante non affectée de B en affichant un maximum d'informations.

(iv) Soit le booléen $P : \forall u \in B, \exists u \in B$

Montrer que P n'est pas vrai.

Exercice 7 :

Soit $C = \{(x, 3x) ; x \in \mathbb{R}\}$

(i) Reformuler l'ensemble C en $\{\text{type} ; \text{condition existentielle}\}$.

(ii) A-t-on $(0, 0) \in C$? A-t-on $(1, 2) \in C$?

(ii) Déclarer une variable parlante affectée de C .

(iii) Déclarer une variable parlante non affectée de C en affichant un maximum d'informations.

(iv) Soit l'assertion $P : \forall u \in C, \exists u \in C$

Montrer que P est vrai.

Exercice 8 :

Soit $D = \{(x + y, 3x + 1, -y) ; x, y \in \mathbb{R}\}$

(i) Reformuler l'ensemble D en $\{\text{type} ; \text{condition existentielle}\}$.

(ii) A-t-on $(0, 0, 0) \in D$? A-t-on $(2, 10, -1) \in D$?

(iii) Déclarer une variable parlante affectée de D .

(iv) Déclarer une variable parlante non affectée de D en affichant un maximum d'informations.

(iv) Soit l'assertion $P : \forall u \in D, \exists u \in D$

Montrer que P n'est pas vrai.

Exercice 9 :

Soit $A = \{(x, 2x, 3x) ; x \in \mathbb{R}\}$. Soit $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -13x - y + 5z = 0\}$.

a) Écrire avec des quantificateurs $A \subset B$.

Montrer que cette inclusion est vraie.

b) Écrire avec des quantificateurs $B \subset A$. Montrer que cette inclusion n'est pas vraie.

Exercice 10 :

Les ensembles ci-dessous correspondent à des parties usuelles de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Dessiner les quand ce sont des parties de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ et décrivez-les par une phrase quand ce sont des parties de $\mathbb{R}^3$.

a) $A = \{(x + 3, x - 5) ; x \in \mathbb{R}\}$

b) $B = \{x^2 + 3 ; x \in [-3; 2]\}$

c) $C = \{(x - y + 2, 3x - 6, y + 5) ; x, y \in \mathbb{R}\}$

d) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \leq x \leq 2 \text{ et } y = x^2 + 3\}$;

e) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4 \text{ et } y \leq |x|\}$

f) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 2)^2 \leq 3\}$;

g) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$

h) $I = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\}$;

i) $J = \{7, a - 8\} ; a \in \mathbb{R}\}$

j) $K = \left\{ \frac{1}{x + 3} ; x \in [2; 4] \right\}$

k) $L_1 = \{(a, 12a) ; a \in \mathbb{R}\}$; $L_2 = \{(a, 12a)\}$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé au préalable.

l) $M = \{(3x, -x, 12x) ; x \in \mathbb{R}\}$

m) $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 2 \text{ et } x^2 \leq y \leq -x^2 + x\}$

n) $O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, \pi] \text{ et } y - \sin x \geq 0\}$

o) $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0\}$

p) $Q = \{e^x + 3 ; x \in \mathbb{R}\}$

q) $R = \{(x, e^x + 3) ; x \in \mathbb{R}\}$

r) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} ; x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 \leq 0\}$

s) $T = \{(3x + 6y; 2x + 4y, x + 2y); x, y \in \mathbb{R}\}$

t) $U = \{|x| ; x \in \mathbb{R}\}$;

u) $V = \{(x + 2y - 5; 2x + 4y + 12, 3x + 6y); x, y \in \mathbb{R}\}$

v) $W = \{(x, 3x - 5, 12x + 2) ; x \in \mathbb{R}\}$

Chapitre 3

Connecteurs logiques, intersection et union d'ensembles

3.1 Les connecteurs logiques

Soit A et B deux assertions. Il y a quatre connecteurs logiques qui permettent de "fabriquer" des assertions dites "composées".

3.1.1 Le connecteur "NON" (noté $\neg$)

Propriété 3.1.1. *Étant donné une assertion A , le connecteur $\neg$ (NON) permet de fabriquer la nouvelle proposition $\neg A$ qui est vraie si et seulement si A est fausse*

Voici donc la table de vérité du "NON" :

A	$\neg A$
0	1
1	0

FAUX et VRAI sont représentés respectivement par 0 et 1.

Quand utiliser le "NON" ?

Pour montrer qu'une assertion A est fausse, on peut montrer que $\neg A$ est vraie.

On a déjà travaillé ce connecteur dans le chapitre 1.

3.1.2 Le connecteur "ET" (noté $\wedge$)

Propriété 3.1.2. *Étant donné deux booléens A et B , le connecteur $\wedge$ (ET) permet de fabriquer le nouveau booléen $A \wedge B$ qui est vrai si et seulement si A et B sont vrais.*

Voici la table de vérité du "ET" :

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

FAUX et VRAI sont représentés respectivement par 0 et 1.

Comment montrer un "ET" ?

Pour montrer $A \wedge B$ on fait **deux démonstrations distinctes**, l'une qui prouve que A est vrai, l'autre qui montre que B est vrai.

■ Exercice corrigé (correction en vidéo)

Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 0\}$.

1) Montrer que E est non vide.

2) Montrer que :

$\forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, (u + v \in E) \wedge (\lambda u \in E)$

3.1.3 Le connecteur "IMPLIQUE" (noté $\Rightarrow$)

Propriété 3.1.3. *Étant donné deux booléens A et B , on peut créer un nouveau booléen $A \Rightarrow B$. Ce booléen est faux si et seulement si A est vrai et B est faux.*

Voici la table de vérité du $\Rightarrow$:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$A \Rightarrow B$ peut se lire de plusieurs façons :

" A vraie implique B vraie".

" Si A est vraie, alors B sera vraie aussi".

" Il suffit que A soit vraie pour que B le soit ".

"Il faut que B soit vraie pour que A le soit ".

Le symbole $\Rightarrow$ parle de ce qu'il se passe quand A est vrai (le fait que B doit alors l'être aussi), on comprend donc très bien les deux dernières lignes de la table de vérité. Finalement, ce symbole ne parle pas de ce qu'il se passe quand A est fausse et il paraît donc logique de considérer que dès que A est faux alors B peut être faux ou vrai, ça ne compte pas pour considérer que $A \Rightarrow B$ est vrai ce qui explique les deux premières lignes de la table.

■ Comment rédiger la preuve d'un $\Rightarrow$?

Pour montrer $A \Rightarrow B$ on écrit que l'on suppose que A est vrai puis on prouve que B est vrai avec cette hypothèse.

■ Comment rédiger une démonstration par récurrence ?

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et soit $P(n)$ un booléen qui dépend d'un entier n .

Soit P le booléen universel : $\forall n \geq n_0, P(n)$.

Prouver P par récurrence c'est montrer :

(i) $P(n_0)$ vrai

(ii) $\forall n \geq n_0, P(n) \Rightarrow P(n + 1)$.

■ Exercice corrigé (correction en vidéo)

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ impair}) \Rightarrow (n^2 \text{ impair})$$

■ Exercice corrigé en vidéo sur la récurrence

Attention, certaines méthodes de rédaction apprises en terminale ne sont pas satisfaisantes dans le supérieur.

Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Montrer par récurrence la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1 + a)^n \geq 1 + na$$

Propriété 3.1.4.

Soit trois booléens A , B et C .

(i) $\neg(A \Rightarrow B)$ est le booléen $A \wedge (\neg B)$

(ii) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ (Transitivité)

(iii) $A \iff B$ si et seulement si $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

■ Exercice corrigé en vidéo

1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Écrire la négation de

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y)$$

2) Écrire la négation de l'assertion suivante :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, ((a \neq -1) \wedge (b \neq -1)) \Rightarrow (a + b + ab \neq -1)$$

3.1.4 La conjonction "OU" (notée $\vee$)

Propriété 3.1.5. Étant donné deux booléens A et B , on peut créer un nouveau booléen $A \vee B$. Ce booléen est faux si et seulement si A est faux et B est faux.

Voici la table du vérité du "OU" mathématique :

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

On voit que quand A et B sont vraies simultanément, on considère que $A \vee B$ est vraie aussi, c'est pour cela qu'on dit que c'est un OU inclusif.

Voici la table du vérité du " OU exclusif " nommé aussi "ou bien " plutôt utilisé dans le langage courant :

A	B	A ou bien B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

On voit que quand A et B sont vraies simultanément, le A "ou bien" B est considéré faux contrairement au "ou inclusif".

■ Exercice corrigé en vidéo

Soit A et B deux assertions.

(1) Écrire la table de vérité de $\neg A \Rightarrow B$

(2) Comparer avec la table de vérité de $A \vee B$, conclusion ?

Comment montrer un " OU " ?

Montrer $A \vee B$ équivaut à montrer $\neg A \Rightarrow B$ donc on écrit que l'on suppose que $\neg A$ est vérifié puis on prouve que B est vrai avec cette hypothèse.

Propriété 3.1.6.

Soit deux assertions A et B .

(i) $\neg(A \wedge B)$ est l'assertion $(\neg A) \vee (\neg B)$

(ii) $\neg(A \vee B)$ est l'assertion $(\neg A) \wedge (\neg B)$

Exemple : $\neg(\forall x \in \mathbb{R}, (x > 0) \vee (x < 0))$ est $\exists x \in \mathbb{R}, (x \leq 0) \wedge (x \geq 0)$

3.2 Contraposée d'une implication, réciproque d'une implication, contraposée de la réciproque d'une implication

Propriété 3.2.1.

Soit deux booléens A et B .

(i) $A \Rightarrow B$ n'a pas forcément les même valeurs de vérité que $B \Rightarrow A$ qui est appelée réciproque de $A \Rightarrow B$.

(ii) $A \Rightarrow B$ est équivalente à $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ qui est appelée contraposée de $A \Rightarrow B$.

(iii) $B \Rightarrow A$ est équivalente à $(\neg A) \Rightarrow (\neg B)$

Exemple : " Il suffit de travailler pour avoir de bonnes notes "

(Je ne dis pas que cette phrase est vraie...)

Cette assertion peut se schématiser en " travailler $\Rightarrow$ bonnes notes "

Sa contraposée sera " ne pas avoir de bonnes notes $\Rightarrow$ ne pas travailler " et ça a le même sens que la phrase de départ, cela exprime exactement la même idée mais d'une autre façon.

Par contre, dire " ne pas travailler $\Rightarrow$ ne pas avoir de bonnes notes " est une toute autre idée, c'est la contraposée de la réciproque qui a le même sens que " bonnes notes $\Rightarrow$ travailler.

■ Exercice corrigé en vidéo

Soit l'assertion $A : \forall x \in \mathbb{R}, (x \notin \mathbb{Q}) \Rightarrow (1+x \notin \mathbb{Q})$

1) Écrire la négation de A , la contraposée de A , la réciproque de A et la contraposée de la réciproque de A .

2) Démontrer par contraposée que A est vraie.

3.3 Opérations sur les ensembles

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Il y a quatre opérations ensemblistes très analogues aux connecteurs logiques :

1) **L'intersection :**

$$A \cap B = \{x \in E \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

A inter B c'est donc l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à la fois à A et à B .

2) **La réunion :**

$$A \cup B = \{x \in E \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

A union B c'est donc l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A ou (inclusif) à B .

3) **Le complémentaire :**

$$\complement_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

Le complémentaire de A dans E c'est donc l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A .

4) **La différence :**

$$A \setminus B = \{x \in E \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = A \cap \complement_E B$$

La différence A privée de B est donc l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B .

Comment reformuler dans la pratique un complémentaire $\complement_E A$?

On écrit d'abord l'ensemble A en $\{u \in E \mid \text{condition sur } u\}$ quitte à ce que la condition soit existentielle si au départ A était écrit sous forme paramétrique. Il ne reste plus qu'à écrire $\complement_E A = \{u \in E \mid \neg(\text{condition sur } u)\}$

Ex 1 : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 12y + 3z = 2\}$; $\complement_{\mathbb{R}^3} F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 12y + 3z \neq 2\}$

Ex 2 : $G = \{(2x - 3, 4 - x) ; x \in \mathbb{R}\}$.

On peut reformuler en $G = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \exists x \in \mathbb{R}, u = (2x - 3, 4 - x)\}$

Ainsi, $\complement_{\mathbb{R}^2} G = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in \mathbb{R}, u \neq (2x - 3, 4 - x)\}$

Comment reformuler dans la pratique un ensemble $F \cap G$ sans symbole $\cap$?

L'ensemble $F \cap G$ a une écriture ensembliste par défaut qui peut souvent être simplifiée. C'est cette simplification qu'on vous demande de faire avec la consigne " Déterminer $F \cap G$. la façon de procéder est expliquée en vidéo sur les exemples ci-dessous."

■ Exemples corrigés en vidéo

Exemple 1

Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + 3z + t = 4\}$.
Déterminer $F \cap G$.

Exemple 2

Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ et $G = \{(2x, -x, 0, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
Déterminer $F \cap G$.

Exemple 3

Soit $F = \{(t + 3, -t + 2, 2t + 5) \mid t \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(2t - 4, 3t + 2, t - 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
Déterminer $F \cap G$.

Exemple 4

Soit $F = \{(4t + 2, -7t + 1, -2t - 3) \mid t \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(-t - 5, 4t + 2, -2t + 13) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
Déterminer $F \cap G$. Y

Chapitre 3 : Connecteurs logiques, opérations sur les ensembles

Exercice 11 :

Voici des phrases en langage courant. Dire en justifiant rapidement si ces phrases sont vraies ou fausses d'après les règles de logique et énoncer en langage courant la négation logique de la phrase.

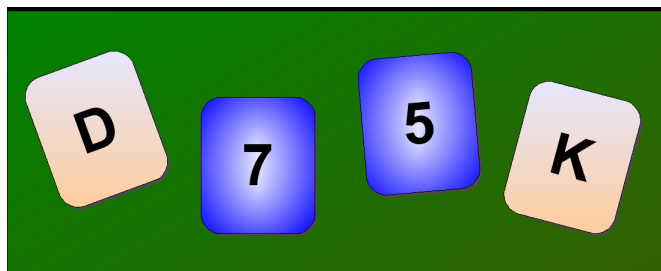
- a) Si Poitiers est dans le sud de la France, alors $12=6$.
- b) Soit Poitiers est dans le sud de la France, soit $12=6$.
- c) Soit $12=6$, soit les chats ont 4 pattes.
- d) Si l'homme est un quadrupède, alors il parle.
- e) Si Poitiers est dans l'ouest de la France alors $12=6$.
- f) Si Poitiers est dans l'Ouest de la France, alors 12 est pair.

Exercice 12 : Test de Wason

Quatre cartes comportant un chiffre sur une face et une lettre sur l'autre, sont disposées à plat sur une table. Une seule face de chaque carte est visible. Les faces visibles sont les suivantes : D, 7, 5, K. Quelle(s) carte(s) devez-vous retourner pour déterminer la véracité de la règle suivante :

Si une carte a un D sur une face, alors elle porte un 5 sur l'autre face.

Il ne faut pas retourner de carte inutilement, ni oublier d'en retourner une.



Exercice 13 :

Pour chacune des propositions suivantes écrire la négation puis décider laquelle des deux est vraie et faire la preuve.

- a) $(24 \text{ est un multiple de } 12) \wedge (2 \text{ divise } 167)$
- b) $\exists x \in \mathbb{R} \mid ((x - 12 = 0) \wedge (x - 2 = 0))$
- c) $(\exists x \in \mathbb{R} \mid x - 12 = 0) \wedge (\exists x \in \mathbb{R} \mid x - 2 = 0)$

Exercice 14 :

Soit l'assertion $P : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \Rightarrow (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \vee (y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

- a) (i) Écrire la contraposée de P
(ii) Montrer que P est vraie par contraposée.
(iii) Écrire la négation de P .
- b) (i) Écrire la contraposée de la réciproque de P .
(ii) Écrire la négation de la contraposée de la réciproque de P . Comparer avec la négation de la réciproque.
(iii) Montrer que la réciproque de P est fausse.

Exercice 15 :

a) Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ et $G = \{(2x, -x, 0, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Donner l'écriture ensembliste par défaut de $F \cap G$ en utilisant une condition existentielle.
Déterminer $F \cap G$.

b) Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + 3z + t = 4\}$.

Donner l'écriture ensembliste par défaut de $F \cap G$.

Déterminer $F \cap G$.

c) Soit $F = \{(t + 3, -t + 2, 2t + 5) \mid t \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(2t - 4, 3t + 2, t - 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Donner l'écriture ensembliste par défaut de $F \cap G$ en utilisant des conditions existentielles.
Déterminer $F \cap G$.

d) Soit $F = \{(4t + 2, -7t + 1, -2t - 3) \mid t \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(-t - 5, 4t + 2, -2t + 13) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Déterminer $F \cap G$.

Chapitre 4

Sommes finies, symbole Σ

4.1 Présentation du symbole Σ et écriture en expansion

Définition 4.1.1.

Soit une suite de termes réels ou complexes $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$, soit n_0 et n deux entiers naturels avec $n_0 \leq n$.

La notation $\sum_{k=n_0}^n u_k$ désigne la somme de tous les termes u_k en partant de $k_{\min} = n_0$ jusqu'à $k_{\max} = n$.

L'écriture dite en expansion de la somme est donc :

$$\sum_{k=n_0}^n u_k = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \dots u_{n-1} + u_n$$

Quand on écrit $\sum_{k=n_0}^n u_k$ les occurrences des variables n_0 et n sont parlantes (elles ont été déclarées avant) contrairement à l'indice k qui est muet.

L'indice n_0 du bas est l'indice $k_{\min}$ qu'on utilise pour débiter une écriture en expansion de la somme. Ensuite on parcourt toutes les valeurs de k jusqu'à l'indice n du haut de la somme qui est l'indice de fin $k_{\max}$ utilisé pour l'écriture en expansion.

Il y a $n - n_0 + 1$ termes à écrire si on formule en expansion la somme.

Exercice corrigé sur l'écriture en expansion.

(correction sur le site <https://laurencedipoi.wixsite.com/site>)

Écrire en expansion les sommes suivantes et vérifier que vous avez le bon nombre de termes :

1) $\sum_{k=1}^5 u_k$ avec $u_k = 3 \times 5^k$; 2) $\sum_{k=0}^6 u_k$ avec $u_k = \frac{2k}{2k+1}$

3) $\sum_{k=0}^6 u_k$ avec $u_k = (-1)^k k^2$;

4) $\sum_{k=0}^6 u_k$ avec $u_k = (-1)^k k^2$ si k est pair et $u_k = 0$ si k impair.

5) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{k=0}^n u_k$ avec $u_k = \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

- 6) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{k=0}^n u_k$ avec $u_k = \frac{(-1)^k n}{2k+1}$.
- 7) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{k=0}^n u_k$ avec $u_k = 12$.

4.2 Passage d'une somme en expansion en $\sum$

On va utiliser $\sum$ quand on veut écrire une somme avec beaucoup de termes, ou bien avec n termes où n est variable parlante non affectée. Mais il faut aussi et surtout, qu'il y ait une suite logique des termes, qu'ils puissent "répondre" à une formule u_k avec $k \in \mathbb{N}$. On commence par trouver une formule qui convient pour les termes puis on repère k_{min} et k_{max} .

Quelques structures usuelles à automatiser :

- Pour des entiers consécutifs on utilise k tout simplement.

Par exemple $S = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12$ se formule en ...

- Une alternance régulière de signe $+ - + - \dots$ répond à la formule $(-1)^k$ ou $(-1)^{k+1}$ ou $(-1)^{k-1}$. Par exemple, la suite d'entiers $-1 ; 2 ; -3 ; 4 ; -5 ;$ peut se formuler enet donc la somme $S = -1 + 2 - 3 + 4 - 5$ peut se formuler en ...

- Un entier pair répond à la formule usuelle $2k$ où k est un entier.

Par exemple, les entiers pairs entre 1 et 58 peuvent être formulés enet donc la somme des entiers pairs entre 1 et 58 se formule en

- Un entier impair répond à l'une des formules usuelles $2k + 1$ ou $2k - 1$.

Par exemple, les entiers impairs entre 1 et 58 peuvent être formulés enet donc la somme des entiers impairs entre 1 et 58 se formule en ...

- Une formule du type $\lambda \cdot q^k$ où q est une constante non nulle et différente de 1 et λ constante non nulle est une formule dite géométrique. On repère du géométrique quand on passe d'un terme au suivant en multipliant par une valeur constante q qui est appelé la raison du terme géométrique. La valeur λ s'ajuste en fonction de l'indice k_{min} avec lequel on veut commencer la somme.

Par exemple, la suite d'entiers $6 ; 12 ; 24 ; 48 ; 96 ;$ C'est une suite géométrique où l'on passe d'un terme au suivant en multipliant par $q = 2$. On a donc une formulation en $\lambda \cdot 2^k$. Si on veut démarrer la somme avec $k_{min} = 0$ alors on prendra $\lambda = 6$ et on aura la formule 6×2^k , si on veut démarrer avec $k_{min} = 1$ on posera $\lambda = 3$ et on aura la formule 3×2^k .

Notons qu'une structure q^{k+r} avec $r \in \mathbb{Z}$ constante se reformule en $q^r q^k$, c'est donc encore du géométrique.

- Une structure arithmétique se formule en $a + kr$ où a et r sont constants. On repère de l'arithmétique quand on observe qu'on passe d'un terme à l'autre en ajoutant toujours la même valeur r . La valeur a s'ajuste selon l'indice k_{min} avec lequel on veut commencer la somme.

Par exemple pour la somme $S = 5 + 11 + 17 + 23 + 29$ on passe d'un terme à l'autre en ajoutant $r = 6$ à chaque fois on a donc une structure $a + 6k$ et si on veut démarrer la somme avec $k_{min} = 0$ alors on prend $a = 5$. Si on voulait démarrer la somme avec $k_{min} = 1$ alors on aurait pris $a = -1$.

Exercice corrigé sur l'écriture en $\sum$ à partir d'une expansion.

(correction sur le site <https://laurencedipoi.wixsite.com/site>)

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 + 3 + 5 + \cdots + 47; & S_2 &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots + 625 - 626; \\ S_3 &= -1 + 2 - 3 + 4 + \cdots - 625 + 626; & S_4 &= 12 + 16 + 20 + \cdots + 60 + 64 \\ S_5 &= 2 - 5 + 8 - 11 + \cdots + 32; & S_6 &= 5 + 10 + 20 + 40 + 80 + 160 + 320 \\ S_7 &= 4 - 12 + 36 - 108 + 324; & S_8 &= 8 + 3 - 2 - 7 - 12; \\ S_9 &= \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \frac{8}{9} + \frac{10}{11} + \frac{12}{13}; \end{aligned}$$

4.3 Opérations usuelles avec $\sum$

- **Somme de somme :**

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

- **Produit par une constante :**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé.

$$\sum_{k=1}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^n a_k$$

- **Relation de Chasles :**

C'est quand on somme en plusieurs paquets au lieu d'un seul. Par exemple :

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{n-2} a_k + \sum_{k=n-1}^n a_k$$

- **Somme d'inégalités :**

Soit n_0 et n deux entiers naturels avec $n_0 \leq n$.

Si $\forall k \in [[n_0; n]]$, $u_k \leq v_k$ est vérifié alors $\sum_{k=n_0}^n u_k \leq \sum_{k=n_0}^n v_k$ sera vérifié aussi.

Exercice corrigé sur les opérations avec $\sum$.

(correction sur le site <https://laurencedipoi.wixsite.com/site>)

1) On pose $\forall k \in \mathbb{N}^*, u_k = \frac{3}{k}$ et on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

a) Écrire en expansion w_1, w_2 et w_3 et comparer les du plus petit au plus grand.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $w_{n+1} - w_n$ à l'aide de la relation de Chasles. En déduire le signe de $w_{n+1} - w_n$ puis la monotonie de la suite (w_n) .

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$. Reformuler la somme S_n suivante de façon à afficher deux sommes, l'une qui affiche comme terme $a_k = 3^k$ et l'autre qui affiche comme terme $b_k = 5^k$

$$S_n = \sum_{k=2}^n (5 \times 3^{k+2} - 12 \times 5^{k-1})$$

3) Comparer en justifiant $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ avec $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

4) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$

5) Calculer $\sum_{k=1}^n k!k^2 - \sum_{j=2}^{n-1} j!j^2$

4.4 Sommes usuelles

- Somme arithmétique :

Soit (u_k) une suite arithmétique (On a donc une structure $a + kr$) La somme de termes consécutifs d'une telle suite est égale à la moyenne (demi-somme) du premier terme de la somme et du dernier terme de la somme, multipliée par le nombre de termes. Ainsi pas besoin de connaître la raison pour calculer une telle somme, il suffit de savoir qu'elle est arithmétique.

$$\sum_{k=n_0}^n u_k = (n - n_0 + 1) \times \frac{u_{n_0} + u_n}{2}$$

En particulier, la somme arithmétique de terme $u_k = k$ se reformule en :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= 1 + 2 + \dots + n \\ &= n \frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

- Somme géométrique :

Soit (u_k) une suite géométrique (On a donc une structure λq^k avec $q \neq 1$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=n_0}^n \lambda q^k &= \lambda q^{n_0} + \lambda q^{n_0+1} + \dots + \lambda q^n \\ &= \lambda q^{n_0} \frac{1 - q^{n-n_0+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

Dans la pratique, pour calculer ces sommes, il suffit de retenir la reformulation suivante :

$$\sum_{k=n_0}^n x^k = \begin{cases} x^{n_0} \frac{1-x^{n-n_0+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n - n_0 + 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- Somme télescopique :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n_0}^n (a_k - a_{k+1}) &= a_{n_0} - a_{n_0+1} + a_{n_0+1} - a_{n_0+2} + \cdots + a_{n-1} - a_n \\ &= a_{n_0} - a_{n+1} \end{aligned}$$

- Somme binomiale :

$$\begin{aligned} \text{Pour } a, b \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n} b^n \\ &= (a+b)^n \end{aligned}$$

Exercice corrigé sur les sommes usuelles.

(correction sur le site <https://laurencedipoi.wixsite.com/site>)

Calculer sans symbole $\sum$ les sommes suivantes ($n \in \mathbb{N}$ est fixé) :

$$\begin{aligned} \text{(i) } S_1 &= \sum_{k=2}^n (3k-2); & \text{(ii) } S_2 &= 2+8+14+20+\cdots+302; \\ \text{(iii) } S_3 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}; & \text{(iv) } S_4 &= \sum_{k=1}^{12} 5 \times 3^k; \\ \text{(v) } S_5 &= \sum_{k=1}^n 5 \times (-2)^{k-2}; & \text{(vi) } S_6 &= \sum_{k=0}^{28} 3^k 2^{28-k}; & \text{(vii) } S_7 &= \sum_{k=0}^{28} \binom{28}{k} 3^k 2^{28-k} \\ \text{(viii) } S_8 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 11^k; & \text{(ix) } S_9 &= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} 4^k (-2)^{n-k}; & \text{(x) } S_{10} &= \sum_{k=0}^{28} \binom{29}{k} 3^k 2^{28-k} \end{aligned}$$

4.5 Changement d'indice

Présentation du principe de changement d'indice

Exercice :

$$\text{Soit } S = \sum_{k=1}^6 a_k, \quad T = \sum_{k=0}^5 a_{k+1}, \quad U = \sum_{k=2}^7 a_{k-1}. \text{ Comparer } S, T \text{ et } U.$$

Réponse :

Dans chacune de ces sommes, il y a 6 termes, il suffit de les écrire en expansion pour voir qu'elles sont toutes les trois égales à $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$.

Reprenons $S = \sum_{k=1}^6 a_k$ et changeons le nom de l'indice dans T pour mieux comprendre :

$$T = \sum_{j=0}^5 a_{j+1}. \text{ Observons "l'intérieur" de ces deux sommes, dans } S \text{ il y a } a_k, \text{ dans } T \text{ il y a } a_{j+1}.$$

La somme T est une reformulation de S obtenue en posant $j + 1 = k$ c'est à dire $j = k - 1$, on comprend alors que $k_{min} = 1$ pour S correspond à $j_{min} = 0$ pour T . Idem avec $k_{max} = 6$ dans S qui donne $j_{max} = 5$ sans T .

Dans la pratique on peut par exemple écrire :

$$S = \sum_{k=1}^6 a_k \underset{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^5 a_{j+1}$$

Cette reformulation est **le changement d'indice** $j = k + 1$.

Souvent, comme l'indice est muet, on préfère (quand on commence à être expérimenté) ne pas changer le nom et écrire :

$$S = \sum_{k=1}^6 a_k \underset{k:=k-1}{=} \sum_{k=0}^5 a_{k+1}$$

On dit alors qu'on fait le changement d'indice $k := k - 1$.

Essayons la même analyse avec U : A l'intérieur de S il y a toujours a_k , tandis que dans U il y a a_{j-1} , on peut donc penser que l'on passe de S à U par le changement d'indice $k = j - 1$ et en effet, pour $k = 1$ dans S on trouve $j = 2$ dans U et pour $k = 6$ dans S on trouve $j = 7$ dans U .

$$S = \sum_{k=1}^6 a_k \underset{k:=k+1}{=} \sum_{k=2}^7 a_{k-1}$$

Changements d'indices usuels

Translation d'indice

On peut toujours reformuler une somme indexée par k en posant $j = k + 1$ ou $j = k - 1$ ou $j = k + 2$ ou $j = k - 2$ etc ... plus généralement, $j = k + l$ où l est un entier relatif fixé, c'est une translation sur les indices.

"Renverser" l'ordre des termes d'une somme

En posant $j = n - k$ dans une somme du type $\sum_{k=n_0}^n u_k$ on "renverse" l'ordre des termes.

Exemple : $S = \sum_{k=12}^n u_k = u_{12} + u_{13} + \dots + u_n$. Avec le changement d'indice $j = n - k$ on reformule en $S = \sum_{j=0}^{n-12} u_{n-j} = u_n + u_{n-1} + \dots + u_{12}$.

Reformuler une somme en disjonction pair/impair

$$\text{On écrit } \sum_{k=n_0}^n u_k = \sum_{\substack{k=n_0 \\ k \text{ pair}}}^n u_k + \sum_{\substack{k=n_0 \\ k \text{ impair}}}^n u_k$$

Puis on fait un changement d'indice $k = 2p$ pour la somme des indices pairs et $k = 2p + 1$ ou $2p - 1$ pour la somme des impairs.

Exercice corrigé sur changements d'indice.

(correction sur le site <https://laurencedipoi.wixsite.com/site>)

1) Réécrire plus simplement les sommes suivantes en effectuant un changement d'indice :

$$\text{a) } \sum_{j=0}^{20} (j+4); \quad \text{b) } \sum_{k=12}^{204} 12^{k-10}; \quad \text{c) } \sum_{k=3}^{n+6} x^{k-2}; \quad \text{d) } \sum_{q=0}^7 \frac{(q+2)^2}{4^{q+2}};$$

e) $\sum_{j=-6}^{18} (j+7)^2(j+7)!$

2) Reformuler la somme $\sum_{k=0}^{30} a_k x^k$ de façon à ce que l'écriture en expansion soit $a_{30}x^{30} + a_{29}x^{29} + \dots a_0$

3) Calculer la somme $S = \sum_{k=0}^{80} u_k$ avec $u_k = (-1)^p 3^{2p}$ si $k = 2p$ est pair et $u_k = (-7)^k$ quand k est impair.

Chapitre 4 : Le symbole Sigma pour les sommes finies

Exercice 16 :

a) Combien de termes dans $S = \sum_{k=2}^{1000} \frac{2k}{k^2 + 2}$?

Écrire le premier terme. Écrire le dernier terme. Écrire S en expansion.

b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Combien de termes dans $\sigma_p = \sum_{k=0}^p \ln(12 + 3k)$?

Écrire le premier terme. Écrire le dernier terme. Écrire S en expansion.

Exercice 17 :

a) Calculer $S_1 = \sum_{k=12}^{80} (3 + 2k)$.

b) Calculer $S_2 = \sum_{k=0}^{80} \left(-2 - \frac{k}{6}\right)$

c) Calculer $S_3 = -5 - 1 + 3 + 7 + \cdots + 395$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{k=0}^n (3n - 2)$. Calculer S_n .

Exercice 18 :

a) Calculer $S_1 = \sum_{k=2}^{80} 3^k$.

b) Calculer $S_2 = \sum_{k=0}^{80} 5 \times (-2)^k$

c) Calculer $S_3 = \sum_{k=0}^n 3 \times 2^{k-1}$ de deux façons différentes.

d) Calculer $S_4 = \sum_{k=0}^{100} 5 \times (3)^{2k+1}$.

e) Calculer $S_5 = 2 + 6 + 18 + 54 + \cdots + 28697814$ sachant que $\log_3(14348907) = 15$

Exercice 19 :

- a) Calculer $S_a = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 2^k (-3)^{100-k}$
- b) Calculer $S_b = \sum_{k=0}^{112} \binom{112}{k} 3^k$
- c) Calculer $S_c = \sum_{k=0}^{31} \binom{32}{k} (-1)^k 2^{33-k}$

Exercice 20 :

- a) Calculer $S_a = \sum_{k=2}^{51} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \right)$ en l'écrivant en expansion.
- b) Refaire le calcul de S_a avec la propriété du cours dite "somme de somme" et un changement d'indice adapté à la translation $k+1$.
- c) Soit $S_b = \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^k} \right)$
- (i) A quelles sommes usuelles du cours S_b ressemble-t-elle (deux réponses attendues)
- (ii) Calculer S_b grâce à la propriété "somme de somme" et un changement d'indice adapté à la translation $k-1$

Exercice 21 :

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $u_k = 2^p$ si $k = 2p$ est pair et $u_k = 2p - 3$ si $k = 2p + 1$ est impair.

a) Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 .

b) Soit $S = \sum_{k=0}^{301} u_k$

Calculer S grâce à la reformulation en "disjonction pair/impair".