

CC1 Algèbre L1PR
Vendredi 14 octobre 2022
Durée 2H00

Documents et machines interdits.

Les réponses non justifiées ne rapporteront aucun point.

Exercice 1 :

- a) Énoncer les deux inégalités triangulaires dans \mathbb{C} .
- b) Démontrer la seconde inégalité en utilisant la première ;

Exercice 2 : 4 pts

Résoudre l'équation $z^4 = 8(-1 - i\sqrt{3})$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Donner les solutions sous forme algébrique et trigonométrique et dessiner-les dans le plan complexe.

Exercice 3 : 5 pts

Soit l'équation $(E) : (1 - i)z^2 - 3(1 - i)z + 4 - 2i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

a) Quelle réponse parmi les suivantes est correcte ?

- i) $\Delta = -8 - 6i$; ii) $\Delta = -8 + 6i$; iii) $\Delta = 8 - 6i$; iv) $\Delta = 8 + 6i$

b) Résoudre (E) et donner les solutions sous forme algébrique.

Exercice 4 : 3 pts

Calculer sous forme algébrique les nombres suivants :

a) $z_1 = (1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5$; b) $z_2 = \frac{(1 + i)^9}{(\sqrt{3} - i)^5}$

Exercice 5 : 6 pts

Soit $f(z) = \frac{z}{z - 2}$ de variable z complexe.

a) Quelle est l'application par défaut, notée φ , associée à f ?

b) φ est-elle injective ? Est-elle surjective ?

c) Montrer que l'application $\psi : \mathbb{C} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$
 $z \longmapsto \frac{z}{z - 2}$ est correctement définie.

d) Montrer que ψ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

e) Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$ et $f^{-1}(i\mathbb{R})$ et dessiner les dans le plan complexe.